Aufgabe 12.12

Sei $f(x) = \dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}$. Bestimmen Sie die Nullstellen, hebbaren Unstetigkeitsstellen (Lücken), Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion! Bestimmen Sie auch die (ggf. einseitigen) Grenzwerte an den Unstetigkeitsstellen!

Lösung:

Zähler: $2x^2+4x-6=0 \iff x^2+2x-3=0 \iff x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}=\begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$,
$2x^2+4x-6=2(x-1)(x+3)$

Nenner: $x^2+x-2=0 \iff x_{1/2}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}}=\begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$, $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Folglich ist $f(x)$ für $x=1$ und $x=-2$ nicht definiert, ansonsten gilt
$f(x)=\dfrac{2x^2+4x-6}{x^2+x-2}=\dfrac{2(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(x+3)}{(x+2)}$.

Folglich hat die Funktion ihre einzige Nullstelle $x=-3$ und ihre einzige Polstelle bei $x=-2$, beide sind erster Ordnung.

Für $x=1$ liegt eine hebbare Unstetigkeit (Lücke) vor, es gilt $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x+3)}{(x+2)}=\dfrac{8}{3}$.

An der Polstelle gilt $\lim\limits_{x\to -2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2-0}\dfrac{2(x+3)}{(x+2)}=-\infty$ und $\lim\limits_{x\to -2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{2(x+3)}{(x+2)}=\infty$,
Asymptote ist die Gerade $x=-2$.

Für $x\to\pm\infty$ schließlich gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=2$, Asymptote ist somit die Gerade $y=2$.