Aufgabe 12.8

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^7+4x^6-4x^5+3x^4-3x^3+2x^2-2x+1}{bx^7+7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}$ in Abhängigkeit von den reellen Parametern a und b !

Lösung:

$\underline{a,b\neq 0:}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^7+4x^6-4x^5+3x^4-3x^3+2x^2-2x+1}{bx^7+7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^7\left(a+\frac{4}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}-\frac{3}{x^4}+\frac{2}{x^5}-\frac{2}{x^6}+\frac{1}{x^7}\right)}{x^7\left(b+\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{4}{x^4}+\frac{3}{x^5}+\frac{2}{x^6}+\frac{1}{x^7}\right)}$$
$$=\frac{a}{b}$$

$\underline{a\neq 0,\ b=0:}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^7+4x^6\mp\ldots}{7x^6+6x^5+\ldots}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^7\left(a+\frac{4}{x}\mp\ldots\right)}{x^6\left(7+\frac{6}{x}+\ldots\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(a+\frac{4}{x}\mp\ldots\right)}{7+\frac{6}{x}+\ldots}=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\end{cases}$$

$\underline{a=0,\ b\neq 0:}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-4x^5\pm\ldots}{bx^7+7x^6+\ldots}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(4-\frac{4}{x}\pm\ldots\right)}{x^7\left(b+\frac{7}{x}+\ldots\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}\pm\ldots}{x\left(b+\frac{7}{x}+\ldots\right)}=0$$

$\underline{a,b=0:}$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-4x^5\pm\ldots}{7x^6+6x^5+\ldots}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6\left(4-\frac{4}{x}\pm\ldots\right)}{x^6\left(7+\frac{6}{x}+\ldots\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{4}{x}\pm\ldots}{7+\frac{6}{x}+\ldots}=\frac{4}{7}$$

(Der Fall $a=0,\ b\neq 0$ kann auch zusammen mit dem Fall $a,b\neq 0$ behandelt werden, das Ergebnis a/b ist auch in diesem Falle richtig.)