Aufgabe 12.7

a und b seien reelle Parameter. Berechnen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+2000x+2}{bx^2-5x-8}$!

Lösung:

Verhalten eines Polynoms für $x \to \infty$ von Glied mit höchster Potenz bestimmt.
$\Longrightarrow$ 4 Fälle: $a \neq 0,\ b \neq 0$
$a = 0,\ b \neq 0$
$a \neq 0,\ b = 0$
$a = 0,\ b = 0$

$$a\neq 0, b\neq 0: \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+2000x+2}{bx^2-5x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{2000}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(b-\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}\right)} = \frac{a}{b}$$

$$a=0, b\neq 0: \lim_{x\to\infty} \frac{2000x+2}{bx^2-5x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2000+\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(b-\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2000}{bx} = 0$$

$$a\neq 0, b=0: \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+2000x+2}{-5x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(a+\frac{2000}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(-5-\frac{8}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{-5} = \begin{cases} -\infty, & a>0 \\ +\infty & a<0 \end{cases}$$

$$a=0, b=0: \lim_{x\to\infty} \frac{2000x+2}{-5x-8} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2000+\frac{2}{x}\right)}{x\left(-5-\frac{8}{x}\right)} = \frac{2000}{-5} = -400$$