Aufgabe 12.5

Berechnen Sie ohne Verwendung der l'Hospitalschen Regel die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{x^2+3x-4}{x^2+9x+20}$ und b) $\lim\limits_{x\to -1} \left(\dfrac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \dfrac{1}{x+1} \right)$!

Lösung:

a) Für $x \to -4$ gehen Zähler und Nenner gegen 0, unbestimmter Ausdruck.

$$x^2+3x-4=0:\ x_{1/2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{16}{4}}=\begin{cases}-4\\ \ \ 1\end{cases},\quad x^2+9x+20=0:\ x_{1/2}=-\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{80}{4}}=\begin{cases}-5\\ -4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+9x+20} = \lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x-1)}{(x+5)(x+4)} = \lim_{x\to -4} \frac{x-1}{x+5} = \frac{-5}{1} = \underline{\underline{-5}}$$

b) Für $x \to -1$ gehen Minuend und Subtrahend gegen $\pm\infty$, unbestimmter Ausdruck.
Da für $x=-1$ Nullstelle von x^3-x^2-x+1 ist, enthält der Nenner x^3-x^2-x+1 den Faktor $x+3$.

$$\begin{array}{l}
(x^3-\ x^2-\ x+1) : (x+1) = x^2-2x+1 = (x-1)^2 \\
\underline{\ x^3+\ x^2\ } \\
\quad -2x^2-\ x+1 \\
\quad \underline{-2x^2-2x\ } \\
\qquad\qquad\ \ x+1 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{x+1} \\
\qquad\qquad\quad\ \ 0
\end{array}$$

$$\lim_{x\to -1} \left(\frac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x\to -1} \left(\frac{x^2-5x-2}{(x+1)\,(x^2-2x+1)} - \frac{1}{x+1} \right)$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-5x-2)-(x^2-2x+1)}{(x+1)\,(x^2-2x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{-3x-3}{(x+1)\,(x^2-2x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{-3\,(x+1)}{(x+1)\,(x^2-2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-3}{x^2-2x+1} = \underline{\underline{-\frac{3}{4}}}$$