Aufgabe 11.65

Für äquidistante Stützstellen mit dem Abstand h berechnen sich die Steigungen für die Newtoninterpolation nach der Formel $[x_1x_2\ldots x_n] =$

$$\frac{1}{(n-1)!\,h^{n-1}}\left[f(x_n)-\binom{n-1}{1}f(x_{n-1})+\binom{n-1}{2}f(x_{n-2})\mp\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}f(x_1)\right].$$

Berechnen Sie mithilfe dieser Formel das Newtonsche Interpolationspolynom für die Interpolationsknoten $(0,-3)$, $(1,1)$, $(2,2)$ und $(3,3)$!

Lösung:

x_i	y_i	1. Steigung	2. Steigung	3. Steigung
0	-3			
		4		
1	1		$-\frac{3}{2}$	
		1		$\frac{1}{2}$
2	2		0	
		1		
3	3			

$h=1$

$[x_1]=-3$

$$[x_1x_2]=\frac{1}{1!}\left(1-\binom{1}{1}(-3)\right)=1+3=4$$

$$[x_1x_2x_3]=\frac{1}{2!}\left(2-\binom{2}{1}\cdot 1+\binom{2}{2}(-3)\right)=\frac{1}{2}(2-2-3)=-\frac{3}{2}$$

$$[x_1x_2x_3x_4]=\frac{1}{3!}\left(3-\binom{3}{1}\cdot 2+\binom{3}{2}\cdot 1-\binom{3}{3}(-3)\right)=\frac{1}{6}(3-6+3+3)=\frac{1}{2}$$

$$P_3(x)=-3+4x-\frac{3}{2}x(x-1)+\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)=-3+4x-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2+x$$
$$=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{13}{2}x-3$$