

Aufgabe 11.63

Gegeben seien die Interpolationsknoten

$$(-2, -41), (-1, -14), (1, -2), (2, 7).$$

Berechnen Sie das Interpolationspolynom von Newton! Wie ändert sich das Ergebnis, wenn nachträglich noch der Punkt $(0, -1)$ berücksichtigt werden soll? Geben Sie die beiden gesuchten Interpolationspolynome jeweils auch in der Form $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ an!

Lösung:

x_i	y_i	1. St.	2. St.	3. St.	4. St.	
-2	-41					
-1	-14	27				
1	-2	6	-7			
2	7	9	1	2		
0	-1	4	5	4	1	fett:
						Ergänzung durch
						nachträglichen Punkt

$$\begin{aligned}
 P_3(x) &= -41 + 27(x+2) - 7(x+2)(x+1) + \underbrace{2(x+2)(x+1)(x-1)}_{2(x+1)(x^2-1)} \\
 &= -41 + 27x + 54 - 7x^2 - 21x - 14 + 2x^3 - 2x + 4x^2 - 4 = \underline{\underline{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}}
 \end{aligned}$$

Durch die Hinzufügung des Punktes $(0, -1)$ ändert sich das Ergebnis in:

$$\begin{aligned}
 P_4(x) &= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + \underbrace{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}_{= 0 \text{ für die bisherigen Knoten}} \\
 &= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + (x^2 - 4)(x^2 - 1) \\
 &= 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 + x^4 - 5x^2 + 4 = \underline{\underline{x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x - 1}}
 \end{aligned}$$