Aufgabe 11.59

Von einer Funktion $y = f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-1	0	1	2
y	$-2{,}24$	0	$0{,}24$	$4{,}48$

a) Ermitteln Sie einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ durch kubische Interpolation!
b) Warum ist die kubische Interpolation im vorliegenden Fall nicht geeignet, wenn bekannt ist, dass die Funktion $f(x)$ monoton wächst? Wie könnte man in diesem Falle einen Näherungswert für $f(0{,}5)$ ermitteln?

Lösung:

a) Lagrange-Interpolation:

$$\begin{aligned}P_3(x) &= -2{,}24\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)} + 0\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)(-2)} + 0{,}24\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)} + 4{,}48\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}\\ &= \frac{2{,}24}{6}(x^3-3x^2+2x) - \frac{0{,}24}{2}(x^3-x^2-2x) + \frac{4{,}48}{6}(x^3-x)\\ &= \left(\frac{2{,}24}{6} - 0{,}12 + \frac{4{,}48}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{6{,}72}{6} + 0{,}12\right)x^2 + \left(\frac{4{,}48}{6} + 0{,}24 - \frac{4{,}48}{6}\right)x\\ &= x^3 - x^2 + 0{,}24x\end{aligned}$$

$$P_3(0{,}5) = 0{,}5^3 - 0{,}5^2 + 0{,}24\cdot 0{,}5 = \underline{\underline{-0{,}005}}$$

b) $P_3(x) = x^3 - x^2 + 0{,}24x = 0$ für $x_1 = 0,\ x_{2/3} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 0{,}24} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}01} = \begin{cases} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{cases}$

hat 2 Nullstellen zwischen 0 und 1, nicht monoton.

Alternativ wäre z.B. stückweise lineare Interpolation $P_1(x) = 0\frac{x-1}{-1} + 0{,}24\frac{x-0}{1} = 0{,}24x$,
$P_1(0{,}5) = \underline{\underline{0{,}12}}$