Aufgabe 11.58

Von einer Funktion $y=f(x)$ liegen folgende Werte vor:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0	0	0	180	48	0	0

a) Bestimmen Sie durch Lagrange-Interpolation das lineare Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x=1$ und 2, das quadratische Interpolationspolynom mit den Stützstellen $x=0$, 1 und 2 sowie das Interpolationspolynom, das alle gegebenen Werte berücksichtigt!
b) Bestimmen Sie die Nullstellen der drei bei a) ermittelten Interpolationspolynome!
c) Welche „Näherungswerte“ ergeben sich mit den drei Polynomen für $f(1{,}5)$?
d) Stellen Sie die drei Interpolationspolynome in einer gemeinsamen Skizze dar!

Lösung:

a) Lineares Interpolationspolynom: $P_1(x)=48\,\dfrac{x-2}{1-2}+0\,\dfrac{x-1}{2-1}=-48(x-2)=\underline{\underline{96-48x}}$

Quadratisches Interpolationspolynom: $P_2(x)=180\,\dfrac{(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)}+48\,\dfrac{x\,(x-2)}{1\cdot(-1)}+0\,\dfrac{x\,(x-1)}{2\cdot 1}$

$$=90\,(x^2-3x+2)-48\,(x^2-2x)=90x^2-270x+180-48x^2+96x=\underline{\underline{42x^2-174x+180}}$$

Sieben Punkte werden durch ein Polynom sechsten Grades interpoliert:

$$P_6(x)=180\,\frac{(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}+48\,\frac{(x+3)(x+2)(x+1)x(x-2)(x-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)}$$

$$=(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)(x+1)\left(\frac{180}{-36}\,(x-1)+\frac{48}{48}\,x\right)=(x^2-9)(x^2-4)(x+1)(-4x+5)$$

$$=(x^4-13x^2+36)(-4x^2+x+5)=-4x^6+52x^4-144x^2+x^5-13x^3+36x+5x^4-65x^2+180$$

$$=\underline{\underline{-4x^6+x^5+57x^4-13x^3-209x^2+36x+180}}$$

b) $P_1(x)=-48(x-2)=0$ gilt nur für $x=2$. $\quad((2,0)$ ist ja Stützstelle der Gerade.)

Die Parabel $P_2(x)$ hat auch die Stützstelle $(2,0)$, die zweite Nullstelle ergibt sich wegen

$(42x^2-174x+180):(x-2)=42x-90 \quad$ zu $\quad x=\dfrac{90}{42}=\dfrac{15}{7}$. $\quad \left(P_2(x)=42\,(x-2)\left(x-\dfrac{15}{7}\right)\right)$

$$\begin{array}{l} \underline{42x^2-\ 84x} \\ \quad -\ 90x+180 \\ \quad \underline{-\ 90x+180} \\ \qquad\qquad\ 0 \end{array}$$

$P_6(x)=(x+3)(x+2)(x+1)(-4x+5)(x-2)(x-3)$, somit sind -3, -2, -1, $\dfrac{5}{4}$, 2 und 3 die Nullstellen.

c) $P_1(1{,}5)=24 \quad$ (Bei linearer Interpolation ergibt sich in der Intervallmitte der Mittelwert.)

$$P_2(1{,}5)=42\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{9}{14}\right)=21\cdot\frac{9}{14}=\frac{27}{2}=13{,}5$$

$$P_6(1{,}5)=\left(\frac{9}{4}-9\right)\left(\frac{9}{4}-4\right)\left(\frac{3}{2}+1\right)\left(-4\cdot\frac{3}{2}+5\right)=\left(-\frac{27}{4}\right)\left(-\frac{7}{4}\right)\cdot\frac{5}{2}\cdot(-1)=-\frac{945}{32}=-29{,}53125$$

(Wegen der starken Oszillation ist das Interpolationspolynom sechsten Grades zur Bestimmung eines Näherungswertes an der Stelle $x=1{,}5$ offenbar ungeeignet.)

d)