

### Aufgabe 11.57

Zwischen den Größen  $x$  und  $y$  bestehe der funktionelle Zusammenhang  $y = f(x) = 5 - \frac{10}{x^2 + 1}$ .

a) Es seien nur die Funktionswerte an 5 Stellen bekannt:  $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 0 & -5 & 0 & 3 & 4 \end{array}$

Nehmen Sie für diese die Lagrange-Interpolation vor!

b) Stellen Sie dieses Interpolationspolynom und die Funktion  $f(x)$  für  $-4 \leq x \leq 6$ ,  $-6 \leq y \leq 8$  in einer gemeinsamen Skizze dar!

### Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } P_4(x) &= 0 \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)} - 5 \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)} + 0 \frac{(x+1)x(x-2)(x-3)}{2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-2)} \\ &\quad + 3 \frac{(x+1)x(x-1)(x-3)}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-1)} + 4 \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= -5 \frac{(x^2-1)(x^2-5x+6)}{-6} + 3 \frac{(x^2-1)(x^2-3x)}{-6} + 4 \frac{(x^2-1)(x^2-2x)}{24} \\ &= \frac{x^2-1}{6} (5(x^2-5x+6) - 3(x^2-3x) + (x^2-2x)) = \frac{x^2-1}{6} (5x^2 - 25x + 30 - 3x^2 + 9x + x^2 - 2x) \\ &= \frac{x^2-1}{6} (3x^2 - 18x + 30) = \frac{x^2-1}{2} (x^2 - 6x + 10) = \frac{1}{2} (x^4 - 6x^3 + 10x^2 - x^2 + 6x - 10) \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x - 5}} \end{aligned}$$

b)

