Aufgabe 11.56

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Interpolation das Polynom vierten Grades, welches an der Stelle 0 den Wert 4, an den Stellen $+1$ und -1 den Wert 12 und an den Stellen $+2$ und -2 den Wert 24 annimmt!

Lösung:

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= 4\frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{2\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-2)} + 12\frac{(x+2)(x+1)\,x\,(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1\cdot(-1)} + 12\frac{(x+2)\,x\,(x-1)(x-2)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} \\
&\quad + 24\frac{(x+2)(x+1)\,x\,(x-1)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} + 24\frac{(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)} \\
&= 4\frac{(x^2-4)(x^2-1)}{4} + 12\frac{(x+2)\,x\,(x-2)}{-6}(x+1+x-1) + 24\frac{(x+1)\,x\,(x-1)}{24}(x+2+x-2) \\
&= (x^2-4)(x^2-1) - 4(x^2-4)\,x^2 + 2(x^2-1)\,x^2 = x^4-5x^2+4 - 4x^4+16x^2 + 2x^4-2x^2 \\
&= \underline{\underline{-x^4+9x^2+4}}
\end{aligned}$$

oder

Aus Symmetriegründen ist das gesuchte Polynom eine gerade Funktion und enthält deshalb nur gerade Potenzen. Deshalb kann es als quadratisches Polynom von x^2 bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
P_4(x) = P_2(x^2) &= 4\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{(0-1)(0-4)} + 12\frac{(x^2-0)(x^2-4)}{(1-0)(1-4)} + 24\frac{(x^2-0)(x^2-1)}{(4-0)(4-1)} \\
&= (x^2-1)(x^2-4) - 4x^2\,(x^2-4) + 2x^2\,(x^2-1) = \underline{\underline{-x^4+9x^2+4}}
\end{aligned}$$