Aufgabe 11.55

Die Größen y_i hängen nach nebenstehender Tabelle von x ab. Nehmen Sie in den 5 Fällen die Lagrange-Interpolation vor! Skizzieren Sie die ermittelten Interpolationspolynome! Um was für Kurven handelt es sich? Welche Näherungswerte würden sich für $y_i(-0.5)$ ergeben? Kommentieren Sie die Ergebnisse!

x	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
-1	1	0	0	0	0
0	1	2	2	2	2
1	1	4	6	6	12
2	1	6	12	18	126

Lösung:

$$P_3(x)=y(-1)\frac{x(x-1)(x-2)}{(-1)(-2)(-3)}+y(0)\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{1(-1)(-2)}+y(1)\frac{(x+1)x(x-2)}{2\cdot 1(-1)}+y(2)\frac{(x+1)x(x-1)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=-\frac{y(-1)}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{y(0)}{2}(x^3-2x^2-x+2)-\frac{y(1)}{2}(x^3-x^2-2x)+\frac{y(2)}{6}(x^3-x)$$

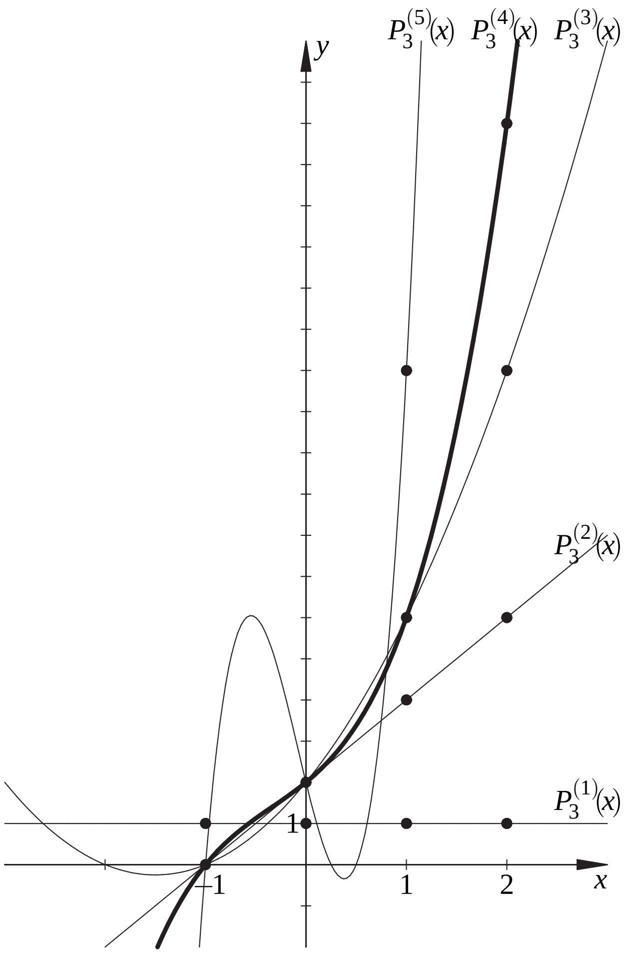
zu y_1: $P_3^{(1)}(x)=-\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{1}{2}(x^3-2x^2-x+2)-\frac{1}{2}(x^3-x^2-2x)+\frac{1}{6}(x^3-x)=1$

zu y_2: $P_3^{(2)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-2(x^3-x^2-2x)+(x^3-x)=2x+2$

zu y_3: $P_3^{(3)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-3(x^3-x^2-2x)+2(x^3-x)=x^2+3x+2$

zu y_4: $P_3^{(4)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-3(x^3-x^2-2x)+3(x^3-x)=x^3+x^2+2x+2$

zu y_5: $P_3^{(5)}(x)=(x^3-2x^2-x+2)-6(x^3-x^2-2x)+21(x^3-x)=16x^3+4x^2-10x+2$



$P_3^{(1)}$: Konstante, $P_3^{(1)}(-0.5)=1$

$P_3^{(2)}$: Gerade, $P_3^{(2)}(-0.5)=1$

$P_3^{(3)}$: Parabel, $P_3^{(3)}(-0.5)=0.75$

$P_3^{(4)}$: kubische Funktion, $P_3^{(4)}(-0.5)=1.125$

$P_3^{(5)}$: kubische Funktion, $P_3^{(5)}(-0.5)=6$

Im Fall $P_3^{(5)}(x)$ oszilliert die kubische Funktion, so dass die kubische Interpolation zur Bestimmung eines Näherungswertes für $y_5(-0.5)$ vermutlich ungeeignet ist.

(Ob der konkave Verlauf der kubischen Funktion $P_3^{(4)}(x)$ zwischen den Stützstellen -1 und 0 für eine Näherungsrechnung sinnvoll ist, sei dahingestellt.)