

### Aufgabe 11.52

Für die Größen  $x$  und  $y$  liegen folgende Werte vor:

$x$	2	2.5	4
$y(x)$	0.5	0.4	0.25

(z.B. erfüllt von  $y(x) = \frac{1}{x}$ ).

- a) Ermitteln Sie eine Näherung für  $y(3)$  durch lineare Interpolation aus  $y(2)$  und  $y(4)$  !
- b) Ermitteln Sie eine Näherung für  $y(3)$  durch lineare Interpolation aus  $y(2.5)$  und  $y(4)$  !
- c) Ermitteln Sie eine Näherung für  $y(3)$  durch quadratische Interpolation aus  $y(2)$ ,  $y(2.5)$  und  $y(4)$  !

### Lösung:

Für  $y(x) = \frac{1}{x}$  ist  $y(3) = \frac{1}{3} = 0.333\dots$

Interpolation durch 2 Punkte: Gerade	fixiert
3	Parabel
4	kubische Funktion
$n$	Polynom $(n-1)$ ten Grades

Lagrange-Interpolationspolynom:  $P_{n-1}(x) =$

$$y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

$= 1$  für  $x = x_1$                        $= 1$  für  $x = x_2$ ,                       $= 1$  für  $x = x_n$   
 $= 0$  für  $x = x_2, \dots, x_n$                $= 0$  für  $x = x_1, x_3, \dots, x_n$                $= 0$  für  $x = x_1, \dots, x_{n-1}$

a)  $P_1(x) = y_1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = 0.5 \frac{x-4}{2-4} + 0.25 \frac{x-2}{4-2} = -0.25(x-4) + 0.125(x-2)$   
 $= 1$  für  $x = x_1$      $= 1$  für  $x = x_2$   
 $= 0$  für  $x = x_2$      $= 0$  für  $x = x_1$

$x$	$y(x)$	$P_1(x)$
2	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>
3	0.333	<u>0.375</u>
4	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>

b)  $P_1(x) = y_1 \frac{x-x_2}{x_1-x_2} + y_2 \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = 0.4 \frac{x-4}{2.5-4} + 0.25 \frac{x-2.5}{4-2.5} = -\frac{0.4}{1.5}(x-4) + \frac{0.25}{1.5}(x-2.5)$   
 $= 1$  für  $x = x_1$      $= 1$  für  $x = x_2$                $= \frac{1}{1.5}(-0.4x + 1.6 + 0.25x - 0.625) = -0.1x + 0.65$   
 $= 0$  für  $x = x_2$      $= 0$  für  $x = x_1$

$x$	$y(x)$	$P_1(x)$
2.5	<b>0.4</b>	<b>0.4</b>
3	0.333	<u>0.35</u>
4	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>

c)  $P_2(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$   
 $= 1$  für  $x = x_1$                        $= 1$  für  $x = x_2$                        $= 1$  für  $x = x_3$   
 $= 0$  für  $x = x_2, x_3$                    $= 0$  für  $x = x_1, x_3$                    $= 0$  für  $x = x_1, x_2$   
 $= 0.5 \frac{(x-2.5)(x-4)}{(2-1.5)(2-4)} + 0.4 \frac{(x-2)(x-4)}{(2.5-2)(2.5-4)} + 0.25 \frac{(x-2)(x-2.5)}{(4-2)(4-2.5)}$

$$\begin{aligned}
&= 0.5 \frac{x^2 - 6.5x + 10}{0.5 \cdot 2} + 0.4 \frac{x^2 - 6x + 8}{-0.5 \cdot 1.5} + 0.25 \frac{x^2 - 4.5x + 5}{2 \cdot 1.5} \\
&= \frac{x^2 - 6.5x + 10}{2} - 1.6 \frac{x^2 - 6x + 8}{3} + 0.25 \frac{x^2 - 4.5x + 5}{3} \\
&= \frac{1}{6} (3x^2 - 19.5x + 30 - 3.2x^2 + 19.2x - 25.6 + 0.5x^2 - 2.25x + 2.5) \\
&= \frac{1}{6} (0.3x^2 - 2.55x + 6.9) = \underline{\underline{0.05x^2 - 0.425x + 1.15}}
\end{aligned}$$

$x$	$y(x)$	$P_1(x)$
2	<b>0.5</b>	<b>0.5</b>
2.5	<b>0.4</b>	<b>0.4</b>
3	0.333	<u>0.325</u>
4	<b>0.25</b>	<b>0.25</b>

