Aufgabe 11.49

Sei $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+a}$ mit einem reellem Parameter a. Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole und Asymptoten dieser rationalen Funktion in Abhängigkeit von a und skizzieren Sie die Funktion grob!

Lösung:

Nullstellen: $x_{1/2}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{8}{4}}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{3}{2}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}, \qquad \dfrac{x^2+x-2}{x+a}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x+a}$

Fallunterscheidung: $a\neq-1;2:$ einfache NS $x=1;-2$, Pol 1. Ordnung bei $x=-a$

$a=-1: \quad \dfrac{x^2+x-2}{x+a}=x+2,\, x\neq 1:$ einfache NS $x=-2$, kein Pol

$a=2: \quad \dfrac{x^2+x-2}{x+a}=x-1,\, x\neq -2:$ einfache NS $x=1$, kein Pol

Für $a=-1;2$ handelt es sich jeweils um eine Gerade mit Lücke (hebbare Unstetigkeit), die ihre eigene Asymptote ist.

Für $a\neq-1;2$ muss zur Bestimmung der Asymptoten eine echt gebrochen rationale Funktion abgespaltet werden:

$$(x^2+x-2):(x+a)=x+(1-a)+\frac{(a-1)a-2}{x+a}=x+(1-a)+\frac{a^2-a-2}{x+a}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{x^2+ax}\\
(1-a)x-2\\
\underline{(1-a)x+(1-a)a}\\
(a-1)a-2
\end{array}$$

Für $x\to\pm\infty$ gilt $\dfrac{a^2-a-2}{x+a}\to 0$, ist also zu vernachlässigen, Asymptoten sind demnach die Gerade $x=-a$ (da $-a$ Pol) und die Gerade $y=x+(1-a)$.

Für die Skizze sind die 5 Fälle $a<-1$, $a=-1$, $-1<a<2$, $a=2$ und $a>2$ zu unterscheiden: