Aufgabe 11.46

a sei ein reeller Parameter. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a, wie viele verschiedene reelle oder komplexe Lösungen die Gleichung $x^4 + 2x^2 + a = 0$ hat, welche Vielfachheit diese haben und ob sie reell sind!

(Die Lösungen müssen nicht ausgerechnet werden, es wird nur nach Anzahl und Eigenschaften gefragt.)

Lösung:

$x^2_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-a}$. Das weitere Vorgehen hängt davon ab, ob x^2 negativ, 0, positiv oder komplex ist. Dies wird durch Fallunterscheidung bezüglich a ermittelt.

$\underline{a < 0:}\ \ 1-a > 1,\ \sqrt{1-a} > 1,\ -1+\sqrt{1-a} > 0,\ -1-\sqrt{1-a} < 0$
$\Longrightarrow$ zwei einfache reelle, zwei einfache komplexe (rein imaginäre) Nullstellen

$\underline{a = 0:}\ \ x^2_{1/2} = -1 \pm 1 = 0, -2$
$\Longrightarrow$ eine doppelte reelle Nullstelle (0), zwei einf. komplexe (rein imag.) Nullstellen ($\pm\sqrt{2}\,\mathrm{i}$)

$\underline{0 < a < 1:}\ \ 0 < 1-a < 1,\ 0 < \sqrt{1-a} < 1,\ -1 \pm \sqrt{1-a} < 0$, verschieden $\Longrightarrow$ vier einfache komplexe (rein imaginäre) Nullstellen

$\underline{a = 1:}\ \ x^2_{1/2} = -1 \pm 0 = -1$
$\Longrightarrow$ zwei doppelte komplexe (rein imaginäre) Nullstellen ($+\mathrm{i}$, $-\mathrm{i}$)

$\underline{a > 1:}\ \ 1-a < 0,\ -1 \pm \sqrt{1-a}$ komplex, verschieden
Durch Wurzelziehen ergeben sich vier komplexe Nullstellen. Diese sind alle einfach.

Zur Begründung der Einfachheit der Nullstellen kann man wie folgt argumentieren: Die Nullstellen sind weder reell noch rein imaginär, haben also die Form $c + d\mathrm{i}$ mit $c \neq 0, d \neq 0$. Mit $x = c + d\mathrm{i}$ sind auch $\overline{x} = c - d\mathrm{i}$, $-x = -c - d\mathrm{i}$ und $-\overline{x} = -c + d\mathrm{i}$ Nullstellen, so dass es vier voneinander verschiedene Nullstellen gibt. Da es auch bei Berücksichtigung von Vielfachheiten nur vier Nullstellen geben kann, müssen diese alle einfach sein.