

Aufgabe 11.45

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Nullstellen des Polynoms

$$P_7(x) = x^7 - x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 36x^3 + 36x^2 \quad !$$

Lösung:

$$x^7 - x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 36x^3 + 36x^2 = x^2(x^5 - x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 36x + 36) = x^2(x-1)(x^4 + 5x^2 - 36)$$

$$x_{1/2} = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_{4/5/6/7}^2 = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{144}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{13}{2} = \begin{cases} 4, & x_{4/5} = \pm 2 \\ -9, & x_{6/7} = \pm 3i \end{cases}$$

Fundamentalsatz der Algebra: Polynom n -ten Grades hat höchstens n verschiedene Nullstellen, genau n Nullstellen, wenn mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

$$x^7 - x^6 + 5x^5 - 5x^4 - 36x^3 + 36x^2 = x^2(x-1)(x^2-4)(x^2+9) = x^2(x-1)(x-2)(x+2)(x-3i)(x+3i):$$

7 Linearfaktoren, zur doppelten Nullstelle $x_{1/2} = 0$ gehört $x \cdot x$.