

Aufgabe 11.44

Sei $f(x) = 2x + \operatorname{sign} x |x - 3|$.

- Skizzieren Sie die Funktion, geben Sie ihren Definitions- und Wertebereich an! Ist die Funktion eineindeutig?
- Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} sowie ihren Definitions- und Wertebereich!
- Ermitteln Sie die Funktionen $f^{-1} \circ f$ und $f \circ f^{-1}$ sowie ihre Definitions- und Wertebereiche!

Lösung:

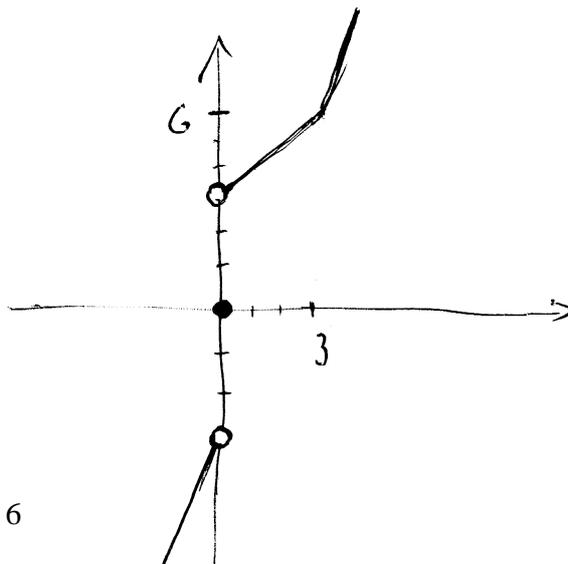
- $x < 0$: $f(x) = 2x - (3 - x) = 3x - 3$
 $x = 0$: $f(x) = 0$
 $0 < x < 3$: $f(x) = 2x + 3 - x = x + 3$
 $3 \leq x$: $f(x) = 2x + x - 3 = 3x - 3$

$$\text{DB}(f) = \mathbb{R}$$

$$\text{WB}(f) = (-\infty, 3) \cup \{0\} \cup (3, \infty)$$

$f(x)$ ist eineindeutig und somit invertierbar.

- $x < 0$: $y = 3x - 3$, $x = \frac{y+3}{3}$, $y < -3$
 $x = 0$: $y = 0$, $x = 0$
 $0 < x < 3$: $y = x + 3$, $x = y - 3$, $3 < y < 6$
 $3 \leq x$: $y = 3x - 3$, $x = \frac{y+3}{3}$, $y \geq 6$



$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+3}{3}, & x < -3 \\ 0, & x = 0 \\ x-3, & 3 < x < 6 \\ \frac{x+3}{3}, & 6 \leq x \end{cases}, \quad \begin{aligned} \text{DB}(f^{-1}) &= \text{WB}(f) = (-\infty, 3) \cup \{0\} \cup (3, \infty) \\ \text{WB}(f^{-1}) &= \text{DB}(f) = \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{c) } (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \begin{cases} \frac{3x-3+3}{3} = x, & x < 0 \\ 0 = 0, & x = 0 \\ x+3-3 = x, & 0 < x < 3 \\ \frac{3x-3+3}{3} = x, & 3 \leq x \end{cases} = x$$

$$\text{DB}(f^{-1} \circ f) = \text{DB}(f) = \mathbb{R},$$

$$\text{WB}(f^{-1} \circ f) = \text{WB}(f^{-1}) = \mathbb{R}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \begin{cases} 3 \frac{x+3}{3} - 3 = x, & x < -3 \\ 0 = 0, & x = 0 \\ x - 3 + 3 = x, & 3 < x < 6 \\ 3 \frac{x+3}{3} - 3 = x, & 6 \leq x \end{cases} = x$$

$$\text{DB}(f \circ f^{-1}) = \text{DB}(f^{-1}) = (-\infty, 3) \cup \{0\} \cup (3, \infty),$$

$$\text{WB}(f \circ f^{-1}) = \text{WB}(f) = (-\infty, 3) \cup \{0\} \cup (3, \infty)$$