Aufgabe 11.39

Durch zwei vorschüssige Jahresraten r sollen bei einer Verzinsung von i p.a. innerhalb von 2 Jahren 1000 € angespart werden. Geben Sie den Zusammenhang zwischen r und i an

a) als implizit definierte Funktion,
b) explizit als Funktion $r = f(i)$,
c) explizit als Funktion $i = g(r)$!

In welcher Beziehung stehen die Funktionen f und g zueinander? Skizzieren Sie die Funktionen! Was würde passieren, wenn man auch eine negative Aufzinsung zulassen würde?

Lösung:

a) Die beiden Zahlungen von r haben nach den 2 Jahren einen Wert von $rq^2 + rq,\ q = 1 + i$. Davon kann man sich auch mit der Endwertformel für vorschüssige Renten überzeugen: $E_2^V = rq\dfrac{q^2-1}{q-1} = rq(q+1) = r(i+1)(i+2)$.

Also lautet der Zusammenhang zwischen der Rate r (in €) und der Zinsrate i in impliziter Form $r(i+1)(i+2) = 1000$.

b) $r = f(i) = \dfrac{1000}{(i+1)(i+2)}$

Mathematisch muss man hier nur $i \neq -1, -2$ fordern. Allerdings würde aus $i < -1$ folgen, dass $q < 0$, die Aufzinsung also negativ wäre. Das würde bedeuten, dass aus einem Guthaben nach einem Jahr Schulden (negatives Kapital), aus diesen aber durch die wiederum negative Aufzinsung nach dem nächsten Jahr wieder ein Guthaben würde. Sinnvoll ist daher, den Definitionsbereich auf $i > -1$ zu beschränken. Die Zinsen könnten dann zwar auch negativ sein, aber nicht das ganze Kapital aufzehren. Aus $i > -1$ folgt sofort auch $r > 0$.

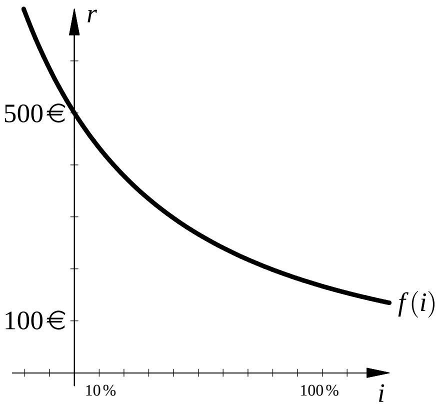
c) $(i+1)(i+2) = \dfrac{1000}{r},\quad i^2 + 3i + 2 - \dfrac{1000}{r} = 0,$

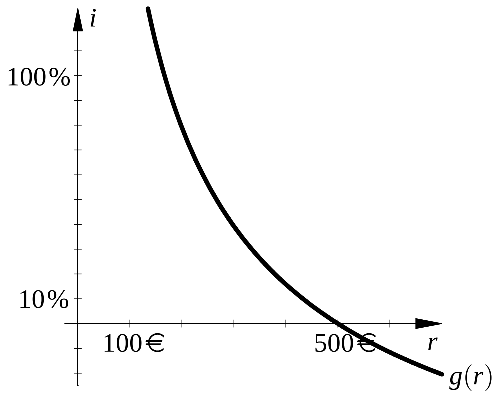
$$i_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2 + \frac{1000}{r}} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1000}{r}}$$

Es ist zunächst sinnvoll, $r > 0$ zu fordern. Dann gilt $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1000}{r}} > \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, also $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1000}{r}} > -1$ und $-\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1000}{r}} < -2$. Sinnvoll ist folglich nur

$$i = g(r) = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1000}{r}},\quad r > 0.$$

Ließe man negative Aufzinsung zu, so wäre i durch r nicht eindeutig bestimmt, der Zusammenhang also keine Funktion. Vielmehr wären durch den impliziten Zusammenhang $r(i+1)(i+2) = 1000$ zwei Funktionen $i = g_{1/2}(r)$ definiert.





Mit den vorgenommenen Einschränkungen $i > -1$ und $r > 0$ sind die Funktionen f und g eineindeutig und Umkehrfunktionen voneinander. Lässt man beliebige $i \neq -1, -2$ zu, so ist die Funktion $r = f(i)$ nicht eineindeutig und hat keine Umkehrfunktion. Mathematisch reicht es, für die Eineindeutigkeit und Existenz der Umkehrfunktion $i \geq -3/2$, $i \neq -1$ zu fordern.