Aufgabe 11.35

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = 1 + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}, \quad x \geq 0$ eine Umkehrfunktion besitzt, ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

Lösung:

Sei $y = 1 + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$. Offensichtlich muss dann $y \geq 1$ sein. Wir setzen deshalb für das Weitere voraus, dass $x \geq 0$ und $y \geq 1$, d.h. auch $y-1 \geq 0$ ist. Unter dieser Voraussetzung sind die folgenden Umformungen äquivalent:

$$y = 1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \iff y-1 = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} \iff (y-1)^2 = \frac{x}{x+1} \iff (x+1)(y-1)^2 = x$$

$$\iff (y-1)^2 = x - x(y-1)^2 = x(1-y^2+2y-1) = x(2y-y^2) \iff x = \frac{(y-1)^2}{2y-y^2} = \frac{(y-1)^2}{y(2-y)}$$

Aus y lässt sich also eindeutig das x errechnen, d.h., derselbe Funktionswert $y = f(x)$ kann nicht zu verschiedenen Argumenten x gehören, die Funktion $f(x)$ ist eineindeutig und besitzt damit eine Umkehrfunktion.

$x \geq 0$ ergibt sich allerdings nur, wenn $\dfrac{(y-1)^2}{y(2-y)} \geq 0$ gilt. Der Zähler ist in jedem Falle nichtnegativ. Im Nenner ist wegen $y \geq 1$ der erste Faktor positiv, deshalb muss auch der zweite Faktor positiv sein: $2-y > 0$, d.h. $y < 2$. Also ist

$$f^{-1}(y) = \frac{(y-1)^2}{y(2-y)}, \quad 1 \leq y < 2.$$

Formales Vertauschen der Variablen führt auf

$$f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2}{x(2-x)},$$

$\mathrm{DB}(f^{-1}) = \mathrm{WB}(f) = \{x \in \mathbb{R} \colon 1 \leq x < 2\}$,

$\mathrm{WB}(f^{-1}) = \mathrm{DB}(f) = \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq 0\}$.