Aufgabe 11.32

Sei $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}}+3$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen. Bestimmen Sie ihren Definitionsbereich, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

Lösung:

Damit beide Wurzeln existieren, müssen beide Radikanden nichtnegativ sein. Das ist für $x\geq -2$ erfüllt. Da für $x\geq -2$ der Nenner nicht gleich 0 werden kann, gilt $\mathrm{DB}(f)=[-2,\infty)$.

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}}+3 \iff \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+4}}=y-3$$

Da die linke Seite nicht negativ werden kann, muss $y\geq 3$ sein. Unter dieser Voraussetzung ist die Gleichung äquivalent zu

$$\frac{x+2}{x+4}=(y-3)^2 \iff (x+2)=(y-3)^2(x+4) \iff x\left(1-(y-3)^2\right)=4(y-3)^2-2 \iff$$
$$x(-y^2+6y-8)=4y^2-24y+34 \iff -x(y-2)(y-4)=4y^2-24y+34$$

Wie bereits festgestellt, muss $y\geq 3$ sein. Der Fall $y=4$ scheidet aus, da sich dann in der zuletzt notierten Ungleichung $0=2$ ergeben würde. Ansonsten gilt $x=\dfrac{4y^2-24y+34}{-y^2+6y-8}=-\dfrac{4y^2-24y+34}{(y-2)(y-4)}$.

Nun muss noch $x\geq -2$ gewährleistet werden. Hierzu wird eine Fallunterscheidung vorgenommen:

<u>$y<4$:</u> $x\geq -2 \iff 4y^2-24y+34\geq 2y^2-12y+16 \iff 2y^2-12y+18=2(y^2-6y+9)=2(y-3)^2\geq 0$
Letzteres ist immer erfüllt, so dass alle y aus diesem Fall zulässig sind.

<u>$y>4$:</u> $x\geq -2 \iff 4y^2-24y+34\leq 2y^2-12y+16 \iff 2y^2-12y+18=2(y^2-6y+9)=2(y-3)^2\leq 0$
Letzteres ist nur möglich für $y=3$, das gehört aber gar nicht zu diesem Fall.

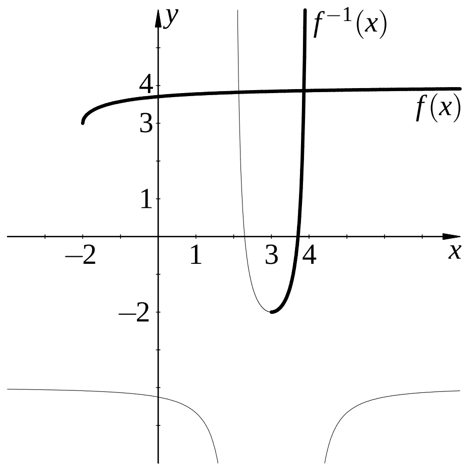
Zu jedem y aus $3\leq y<4$ lässt sich also eindeutig $x=\dfrac{4y^2-24y+34}{-y^2+6y-8}\geq -2$ errechnen, d.h., derselbe Funktionswert $y=f(x)$ kann nicht zu verschiedenen Argumenten gehören, die für $x\geq -2$ definierte Funktion $f(x)$ ist eineindeutig und besitzt damit eine Umkehrfunktion.

Formales Vertauschen der Variablen führt auf

$$f^{-1}(x)=\frac{4x^2-24x+34}{-x^2+6x-8} \quad \text{mit}$$

$\mathrm{DB}(f^{-1})=[3,4)=\{x\in\mathbb{R}:\ 3\leq x<4\}=\mathrm{WB}(f)$,

$\mathrm{WB}(f^{-1})=[-2,\infty)=\{y\in\mathbb{R}:\ y\geq -2\}=\mathrm{DB}(f)$.



(Bei den in der Abbildung schwach gezeichneten Kurven handelt es sich um die Fortsetzung von $g(x)=\dfrac{4x^2-24x+34}{-x^2+6x-8}$ außerhalb des Definitionsbereichs von $f^{-1}(x)$, also um keinen Bestandteil der Umkehrfunktion.)