Aufgabe 11.31

Sei $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ eine reelle Funktion einer reellen Variablen.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich die Funktion $f(x)$, zeigen Sie, dass sie eine Umkehrfunktion besitzt und ermitteln Sie diese Umkehrfunktion und ihren Definitions- und Wertebereich!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Lösung:

a) Damit beide Wurzeln existieren, müssen beide Radikanden nichtnegativ sein. Das ist für $x \geq 2$ erfüllt. Da der Nenner genau dann gleich 0 ist, wenn $x=2$ gilt, ergibt sich $\mathrm{DB}(f) = (2,\infty)$.

Die Gleichung $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}}$ soll nun nach x aufgelöst werden. Da die rechte Seite nicht negativ werden kann, muss $y \geq 0$ sein.

Für $y \geq 0$ gilt $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-2}} \iff y^2 = \dfrac{2x-1}{x-2} \iff (x-2)y^2 = 2x-1$. (Auch die letzte Gleichung ist für $x-2=0$ nicht erfüllt, denn sonst wäre auch $2x-1=0$ und damit $x=2=\frac{1}{2}$.)

Weiter ist $(x-2)y^2 = 2x-1 \iff xy^2-2y^2 = 2x-1 \iff x(y^2-2) = 2y^2-1 \iff x = \dfrac{2y^2-1}{y^2-2}$.
(Auch die vorletzte Gleichung ist für $y^2-2=0$ nicht erfüllt, denn sonst wäre auch $2y^2-1=0$ und damit $y^2=2=\frac{1}{2}$.)

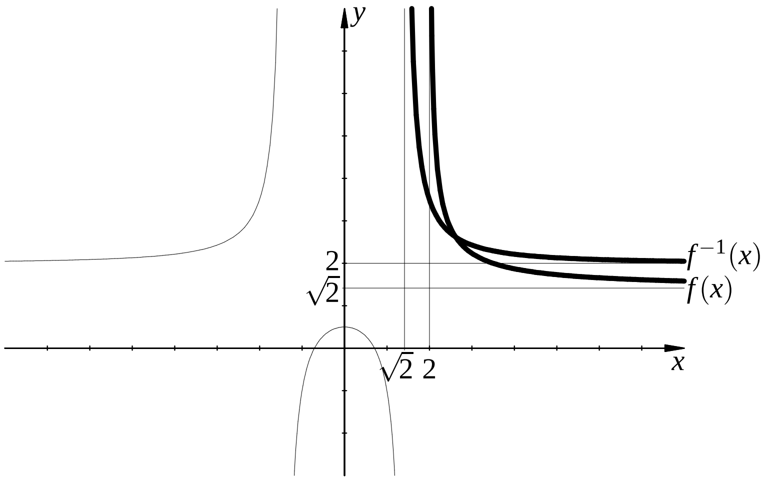
Wegen $\mathrm{DB}(f) = (2,\infty)$ muss hierbei $x>2$ gelten. Da y nichtnegativ und wegen $y^2-2 \neq 0$ ungleich $\sqrt{2}$ sein muss, müssen die Fälle $0 \leq y < \sqrt{2}$ und $y > \sqrt{2}$ unterschieden werden:

$\underline{0 \leq y < \sqrt{2}}$: $y^2-2<0$, $x = \dfrac{2y^2-1}{y^2-2} > 2 \iff 2y^2-1 < 2y^2-4 \iff -1<-4$, Widerspruch.
Diese y sind also nicht möglich, denn für sie gilt nicht $x>2$.

$\underline{y > \sqrt{2}}$: $y^2-2>0$, $x = \dfrac{2y^2-1}{y^2-2} > 2 \iff 2y^2-1 > 2y^2-4 \iff -1>-4$, immer erfüllt.
Für diese y ergibt sich immer ein $x>2$.

Zu jedem $y > \sqrt{2}$ lässt sich also eindeutig $x = \dfrac{2y^2-1}{y^2-2} > 2$ errechnen, d.h., derselbe Funktionswert $y = f(x)$ kann nicht zu verschiedenen Argumenten gehören, die für $x>2$ definierte Funktion $f(x)$ ist eineindeutig und besitzt damit eine Umkehrfunktion.

Formales Vertauschen der Variablen führt auf $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$
mit $\mathrm{DB}(f^{-1}) = (\sqrt{2},\infty) = \mathrm{WB}(f)$ und $\mathrm{WB}(f^{-1}) = (2,\infty) = \mathrm{DB}(f)$.



(Bei den in der Abbildung schwach gezeichneten Kurven handelt es sich um die Fortsetzung von $g(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2-2}$ außerhalb des Definitionsbereichs von $f^{-1}(x)$, also um keinen Bestandteil der Umkehrfunktion.)

b) Da die Funktionswerte $y=f(x)$ positiv sind und $x-2>0$ ist, gilt

$$y_1<y_2 \iff \frac{\sqrt{2x_1-1}}{\sqrt{x_1-2}}<\frac{\sqrt{2x_2-1}}{\sqrt{x_2-2}} \iff \frac{2x_1-1}{x_1-2}<\frac{2x_2-1}{x_2-2}$$
$$\iff (2x_1-1)(x_2-2)<(2x_2-1)(x_1-2)$$
$$\iff 2x_1x_2-4x_1-x_2+2<2x_2x_1-4x_2-x_1+2 \iff 3x_2<3x_1 \iff x_1>x_2.$$

Da es sich durchgehend um äquivalente Umformungen handelt, sind sowohl $f(x)$ als auch $f^{-1}(x)$ streng monoton fallend.