Aufgabe 11.30

Sei $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ eine reellwertige Funktion.

a) Geben Sie den Definitionsbereich dieser Funktion an, zeigen Sie, dass sie eineindeutig ist, bestimmen Sie ihre Umkehrfunktion und deren Definitions- und Wertebereich!

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion ohne Verwendung von Mitteln der Differenzialrechnung auf Monotonie!

Lösung:

a) $\mathrm{DB}(f)=[-3,\infty)$

$$y=\frac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}} \implies y+y\sqrt{x+3}=2-\sqrt{x+3} \implies \sqrt{x+3}(y+1)=2-y \implies \sqrt{x+3}=\frac{2-y}{1+y}$$

($y=-1$ ist offensichtlich unmöglich, da dann $2-\sqrt{x+3}=-1-\sqrt{x+3}$ sein müsste.)

Es muss $\dfrac{2-y}{1+y}\geq 0$ sein, dies gilt für $\begin{cases} 2-y\geq 0,\ 1+y>0 \ \Leftrightarrow\ -1<y\leq 2 & \text{oder} \\ 2-y\leq 0,\ 1+y<0 \ \Leftrightarrow\ y\geq 2 \wedge y<1 & \text{Widerspruch} \end{cases}$

Also ist nur $-1<y\leq 2$ möglich, dann ergibt sich durch Quadrieren $x+3=\left(\dfrac{2-y}{1+y}\right)^2$ und damit $x=\dfrac{4-4y+y^2}{1+2y+y^2}-3=\dfrac{4-4y+y^2-3-6y-3y^2}{1+2y+y^2}=\dfrac{1-10y-2y^2}{1+2y+y^2}$.

Das Urbild x von y ist also eindeutig bestimmbar. Damit ist die Funktion eineindeutig und die Umkehrfunktion existiert. Nach formalem Vertauschen der Variablen erhält man

$f^{-1}(x)=\dfrac{1-10x-2x^2}{1+2x+x^2}$ mit $\mathrm{DB}(f^{-1})=(-1,2]=\mathrm{WB}(f)$, $\mathrm{WB}(f^{-1})=[-3,\infty)=\mathrm{DB}(f)$.

b) Wir untersuchen, wann $f(x)>f(y)$ gilt:

$$\frac{2-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}>\frac{2-\sqrt{y+3}}{1+\sqrt{y+3}} \iff (2-\sqrt{x+3})(1+\sqrt{y+3})>(2-\sqrt{y+3})(1+\sqrt{x+3})$$
$$\iff 2-\sqrt{x+3}+2\sqrt{y+3}-\sqrt{x+3}\sqrt{y+3}>2-\sqrt{y+3}+2\sqrt{x+3}-\sqrt{y+3}\sqrt{x+3}$$
$$\iff 3\sqrt{y+3}>3\sqrt{x+3} \iff y>x.$$

(Bei der ersten Umformung ist beachtet, dass beide Nenner positiv sind, das beim letzten Schritt erforderliche Quadrieren ist auch eine äquivalente Umformung, da beide Seiten der Ungleichung nichtnegativ sind.)

Somit gilt $x<y \iff f(x)>f(y)$, wegen der Existenz der Umkehrfunktion ist das äquivalent zu $\tilde{x}>\tilde{y} \iff f^{-1}(\tilde{x})<f^{-1}(\tilde{y})$. Also sind die Funktion $f(x)$ und ihre Umkehrfunktion streng monoton fallend (und damit eineindeutig).

(Die strenge Monotonie von $f(x)$ sieht man auch sofort an der Darstellung $f(x)=\dfrac{3-1-\sqrt{x+3}}{1+\sqrt{x+3}}$ $=\dfrac{3}{1+\sqrt{x+3}}-1$.)