Aufgabe 11.18

Leiten Sie mit Hilfe der Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung bzw. der Moivreschen Formel her, wie $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, $\cos 3x$, $\sin 3x$ durch $\cos x$, $\cos y$, $\sin x$ und $\sin y$ dargestellt werden können!

Lösung:

Multiplikation komplexer Zahlen: Beträge multiplizieren, Winkel addieren

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+\mathrm{i}\sin(x+y) &= (\cos x+\mathrm{i}\sin x)(\cos y+\mathrm{i}\sin y)\\ &= (\cos x\cos y-\sin x\sin y)+\mathrm{i}\,(\sin x\cos y+\cos x\sin y),\end{aligned}$$

also: $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$,
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$ „Additionstheoreme“

Die Formeln für $2x$ ergeben sich aus diesen für den Spezialfall $x=y$ oder mit Hilfe der Moivreschen Formel: Potenzieren komplexer Zahlen: Betrag hoch Exponent, Winkel mal Exponent

$$\cos 2x+\mathrm{i}\sin 2x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^2=\cos^2 x-\sin^2 x+2\mathrm{i}\sin x\cos x,$$

also: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$,
$\sin 2x=2\sin x\cos x$

$$\cos 3x+\mathrm{i}\sin 3x=(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^3=\cos^3 x+3\cos^2 x\sin x\,\mathrm{i}-3\cos x\sin^2 y-\sin^3 x\,\mathrm{i},$$

also: $\cos 3x=\cos^3 x-3\sin^2 x\cos x=\cos^3 x-3(1-\cos^2 x)\cos x=\cos^3 x-3\cos x+3\cos^3 x$
$=4\cos^3 x-3\cos x$,
$\sin 3x=3\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=3\sin x(1-\sin^2 x)-\sin^3 x=3\sin x-3\sin^3 x-\sin^3 x$
$=3\sin x-4\sin^3 x$