Aufgabe 11.15

Für welche reellen x gilt

a) $2^{x+4} > 3$, b) $0.5^{x+4} > 3$, c) $\log_2(x+4) > 3$, d) $\log_{0.5}(x+4) > 3$?

Lösung:

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist definiert für $a > 0$,

sie ist für $\begin{cases} a > 1 & \text{monoton wachsend,} \\ a = 1 & \text{konstant,} \\ 0 < a < 1 & \text{monoton fallend.} \end{cases}$ (Beachte $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$!)

a) $2^{x+4} > 3 \iff x+4 > \log_2 3 = \log_2 \mathrm{e} \log_\mathrm{e} 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585,\ \ x > \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 4 \approx -2.415$

Regeln: $\boxed{\log_a c = \log_a b \log_b c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a} = \dfrac{\lg c}{\lg a} = \dfrac{\ln c}{\ln a}}$

b) $0.5^{x+4} > 3 \iff x+4 > \log_{0.5} 3 = \dfrac{\ln 3}{\ln 0.5} \approx -1.585,\ \ x > \dfrac{\ln 3}{\ln 0.5} - 4 \approx -5.585$

$(\ln 0.5 = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2)$

Die Logarithmusfunktion $f(x) = \log_a x$ ist definiert für $a > 0$ mit $a \neq 1$ und $x > 0$,

sie ist für $\begin{cases} a > 1 & \text{monoton wachsend,} \\ 0 < a < 1 & \text{monoton fallend.} \end{cases}$

c) $\log_2(x+4) > 3 \iff x+4 > 2^3 = 8,\ \ x > 4$

d) $\log_{0.5}(x+4) > 3 \iff 0 < x+4 < 0.5^3 = \dfrac{1}{8},\ \ -4 < x < \dfrac{31}{8} = -3.875$