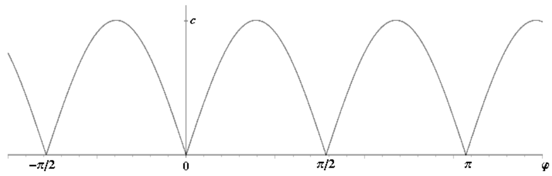
Aufgabe 11.11

Gegeben sei die Funktion $f(\varphi) = c\,|\sin 2\varphi|$ mit einem nichtnegativen reellen Parameter c.

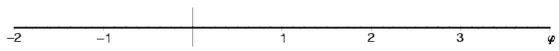
a) Skizzieren Sie die Funktion in kartesischen Koordinaten!
b) Geben Sie die kleinste Periodenlänge der Funktion an!
c) Wo ist die Funktion monoton wachsend, wo ist sie monoton fallend?
d) Ist die Funktion gerade bzw. ungerade?
e) Sei $c = 1$. Skizzieren Sie die Menge aller Punkte der Ebene, für deren Polarkoordinaten (r, φ) die Beziehung $r = f(\varphi) = |\sin 2\varphi|$ gilt!

Lösung:

a) $c > 0$:



$c = 0$:



b) Für $c = 0$ ist die Funktion konstant, für $c > 0$ ist die kürzeste Periodenlänge $\frac{\pi}{2}$. Es gilt

$$f(\varphi + \frac{\pi}{2}) = c\left|\sin 2(\varphi + \frac{\pi}{2})\right| = c\,|\sin(2\varphi + \pi)| = c\,|\sin 2\varphi \cos\pi + \cos 2\varphi \sin\pi|$$
$$= c\,|\sin 2\varphi \cdot (-1) + \cos 2\varphi \cdot 0| = c\,|-\sin 2\varphi| = c\,|\sin 2\varphi| = f(\varphi).$$

c) Für $c=0$ ist die Fkt. konst., sonst $\begin{cases} \text{monoton wachsend für } k\frac{\pi}{2} < x < k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, & k \in \mathbb{Z} \\ \text{monoton fallend für } k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < x < (k+1)\frac{\pi}{2}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.

d) Offensichtlich ist die Funktion gerade: $f(-\varphi) = c\,|\sin(-2\varphi)| = c\,|-\sin\varphi| = c\,|\sin\varphi| = f(\varphi)$.

Für $c = 0$ ist die Funktion sogar gleichzeitig gerade und ungerade: $f(-\varphi) = f(\varphi) = -f(\varphi) = 0$.

e)