Aufgabe 11.10

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Periodizität und Beschränktheit! Geben Sie ggf. die kleinste Periodenlänge sowie den kleinsten und größten Funktionswert an:

a) $f(x) = \frac{5}{6}\sin(7x+8)$, b) $f(x) = \mathrm{e}^{x+\sin x}$, c) $f(x) = \frac{1}{4+\sin x}$!

Lösung:

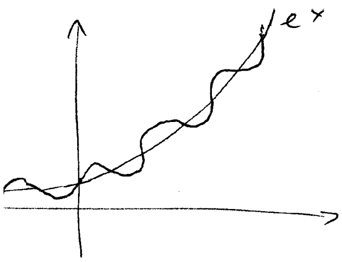
a) sin hat kleinste Periodenlänge 2π.

$$\sin(7x+8) = \sin(7x+8+2\pi) = \sin\left(7(x+\frac{2}{7}\pi)+8\right),$$
$$\frac{5}{6}\sin(7x+8) = \frac{5}{6}\sin\left(7(x+\frac{2}{7}\pi)+8\right),$$
$$f(x) = f\left(x+\frac{2}{7}\pi\right): \quad \text{periodisch mit kleinster Periode } \frac{2\pi}{7}$$

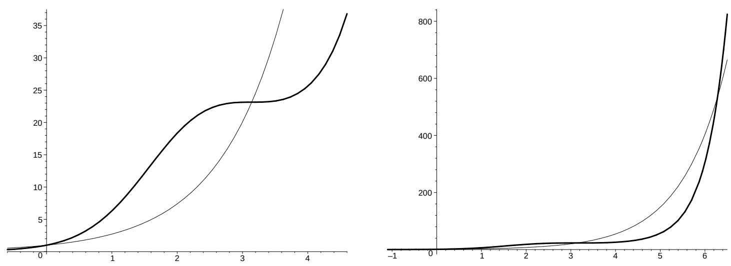
$$-1 \le \sin(7x+8) \le 1$$
$$-\frac{5}{6} \le \quad f(x) \quad \le \frac{5}{6} \qquad \text{Grenzen werden angenommen, z.B. } f\left(\frac{\frac{\pi}{2}-8}{7}\right) = \frac{5}{6}$$

$|f(x)| \le \frac{5}{6}$, also beschränkt, kleinster Funktionswert $-\frac{5}{6}$, größter Funktionswert $\frac{5}{6}$.

b) $x+\sin x \ge x-1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(x-1) = \infty$, also divergiert auch $x+\sin x$ und damit auch $\mathrm{e}^{x+\sin x}$. Die Funktion ist weder periodisch noch beschränkt, es gilt $0 < \mathrm{e}^{x+\sin x} < \infty$, die Funktion ist nach unten durch 0 beschränkt. Da aber 0 nicht als Funktionswert angenommen wird, existiert weder ein kleinster noch ein größter Funktionswert.



Schwankung übertrieben



$\mathrm{e}^{x+\sin x}$ (stark) und zum Vergleich e^x (schwach)

c) $f(x) = \frac{1}{4+\sin(x+2\pi)} = \frac{1}{4+\sin x} = f(x)$, also periodisch mit kleinster Periode 2π.

$$\begin{array}{ccccc} -1 & \le & \sin x & \le & 1 \\ 3 & \le & 4+\sin x & \le & 5 \\ \frac{1}{3} & \ge & \frac{1}{4+\sin x} & \ge & \frac{1}{5} \end{array} \qquad \text{Grenzen werden angenommen}$$

$|f(x)| \le \frac{1}{3}$, also beschränkt, kleinster Funktionswert $\frac{1}{5}$, größter Funktionswert $\frac{1}{3}$.