Aufgabe 11.8

Welche der folgenden Funktionen sind gerade, ungerade bzw. haben keine dieser Eigenschaften:

a) $f(x) = x\sin x$, b) $f(x) = \arcsin x$, c) $f(x) = \arccos x$, d) $f(x) = \dfrac{(x^5+4x^3+2x)\sin^2 x}{|x|\cos x}$,

e) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, f) $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$, g) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, h) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$,

i) $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1}+x)$?

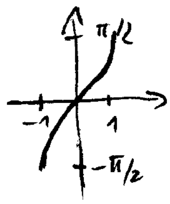
Hinweis zu i): Berechnen Sie $f(x)+f(-x)$!

Lösung:

gerade: $f(-x) = f(x)$ (symmetrisch bezüglich der y–Achse)
ungerade: $f(-x) = -f(x)$ (symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs)

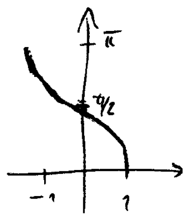
a) $f(-x) = -x\sin(-x) = -x(-\sin x) = x\sin x = f(x)$, d.h. gerade

b) $\mathrm{DB}(\arcsin) = [-1,1]$, $\mathrm{WB}(\arcsin) = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$



ungerade wie Sinus

c) $\mathrm{DB}(\arccos) = [-1,1]$, $\mathrm{WB}(\arccos) = [0,\pi]$



weder gerade noch ungerade

d) $$f(-x) = \frac{((-x)^5+4(-x)^3-2x)\,(\sin(-x))^2}{|-x|\cos(-x)} = \frac{(-x^5-4x^3-2x)\,(-\sin x)^2}{|x|\cos x}$$
$$= \frac{-(x^5+4x^3+2x)\,(\sin x)^2}{|x|\cos x} = -\frac{(x^5+4x^3+2x)\sin^2 x}{|x|\cos x} = -f(x),$$ d.h. ungerade

e) 

weder gerade noch ungerade

f) $f(-x) = \mathrm{e}^{\cos(-x)} = \mathrm{e}^{\cos x} = f(x)$, d.h. gerade

g) $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x}{2} = f(x)$, d.h. gerade

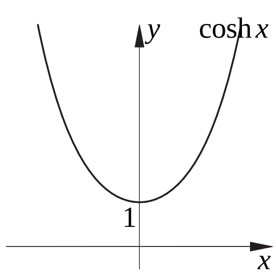
Die Funktion heißt „Kosinus Hyperbolicus“:

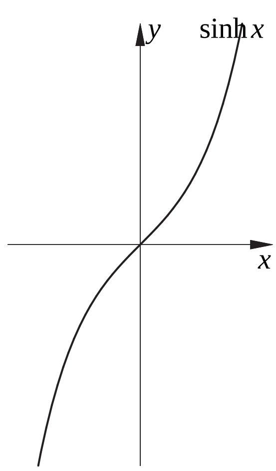
$$\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

h) $f(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2} = -\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2} = -f(x)$,
d.h. ungerade

Die Funktion heißt „Sinus Hyperbolicus“:

$$\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$$





i) $\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\ln\left(x^2+1-x^2\right)=\ln 1=0$, daher gilt
$f(-x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-f(x)$, d.h. ungerade