

Aufgabe 11.7

Die in Promille angegebene Konzentration eines Schadstoffs zum Zeitpunkt t betrage $f(t) = \frac{200}{c+2e^{-at}}$. Sie wurde zum Zeitpunkt $t=0$ mit 40 und zum Zeitpunkt $t=1$ mit 43,127 gemessen.

- Ermitteln Sie die Parameter c und a !
- Welchen Wert kann die Schadstoffkonzentration maximal annehmen?

Lösung:

$$\text{a) } f(0) = \frac{200}{c+2e^{-a \cdot 0}} = \frac{200}{c+2} = 40, \quad c+2 = \frac{200}{40} = 5, \quad c = 3$$

$$f(1) = \frac{200}{3+2e^{-a}} = 43,127, \quad 3+2e^{-a} = \frac{200}{43,127} = 5, \quad e^{-a} = \frac{1}{2} \left(\frac{200}{43,127} - 3 \right) \approx 0,81873, \\ a \approx -\ln 0,81873 \approx 0,2$$

$$\text{b) } f(t) = \frac{200}{3+2e^{-0,2t}}, \quad \lim_{t \rightarrow \text{inf ty}} f(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{200}{3} \approx 66,67.$$

Die Funktion $f(t)$ ist überall streng monoton wachsend, da die im Nenner enthaltene Exponentialfunktion $e^{-0,2t}$ überall streng monoton fallend ist. Die Schadstoffkonzentration kann deshalb maximal $\frac{200}{3} \approx 66,67$ werden, ohne diesen Wert jemals zu erreichen.