Aufgabe 10.65

Auf ein unverzinstes Konto werden von einem gewissen Jahr an jährlich 1000 € eingezahlt, außerdem werden jährlich 4 % des Vorjahresguthabens entnommen, so dass das Guthaben am Ende des ersten Jahres 1000 €, am Ende des zweiten Jahres 1960 € beträgt usw.

a) Stellen Sie die Entwicklung des Guthabens als Reihe dar!
b) Welches Guthaben wird asymptotisch erreicht, wenn dieser Prozess unendlich lange weitergeführt wird?

Lösung:

a) Guthaben am Ende des n-ten Jahres in €:

$$1000+1000\cdot 0.96+1000\cdot 0.96^2+\ldots+1000\cdot 0.96^{n-1}=1000\sum_{k=0}^{n-1}0.96^k\left(=1000\,\frac{1-0.96^n}{1-0.96}\right)$$

(Dies entspricht dem Endwert einer nachschüssigen Rente mit einer Verzinsung von -4 %.)

b) Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q=0.96$, die wegen $|q|<1$ konvergiert.

$$\lim_{n\to\infty}1000\sum_{k=0}^{n-1}0.96^k=\frac{1000}{1-0.96}=\frac{1000}{0.04}=1000\cdot 25=25\,000$$

Asymptotisch wird also ein Guthaben von 25 000 € erreicht. (Das ist klar, denn das ist das Guthaben, aus dem bei einer jährlichen Entnahme von 4 % immer gerade der Einzahlungsbetrag von 1000 € entnommen wird, so dass es unverändert bleibt.)