Aufgabe 10.34

Ein Kapital K_0 wird mit p p.a. verzinst, wobei das Jahr in m gleiche Abschnitte aufgeteilt wird und die anteiligen Zinsen am Ende jedes Abschnitts dem Kapital gutgeschrieben und mit diesem verzinst werden.

a) Welches Guthaben wird nach einem Jahr erreicht, wie hoch ist der effektive Jahreszins?
b) Welcher Grenzwert ergibt sich für $m \longrightarrow \infty$ (kontinuierliche Verzinsung)?
c) Was ergibt sich bei einer Verzinsung von 6 % p.a.? Vergleichen Sie dies mit dem Ergebnis von Aufgabe 10.32!

Lösung:

a) $K_{1,m} = K_0 \left(1+\frac{p}{m}\right)^m, \qquad q_{\text{eff}} = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m, \qquad$ effektiver Jahreszins: $p_{\text{eff}} = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m - 1$

b) $\lim\limits_{m\to\infty} K_0 \left(1+\frac{p}{m}\right)^m = K_0 \lim\limits_{m\to\infty} \left(1+\frac{p}{m}\right)^m$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$

$$\lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{p}{m}\right)^m = \lim_{m\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{m}{p}}\right)^p i = \left(\lim_{\frac{m}{p}\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{m}{p}}\right)^{\frac{m}{p}}\right)^p = \mathrm{e}^p.$$

Also gilt $\lim\limits_{m\to\infty} K_0 \left(1+\frac{p}{m}\right)^m = K_0 \mathrm{e}^p,\ q_{\text{kont.}} = \mathrm{e}^p,$ effektiver Jahreszins: $p_{\text{kont.}} = \mathrm{e}^p - 1.$

c) Für $p = 0.06$ ist $\mathrm{e}^p = 1.0618365,\ p_{\text{kont.}} = 6.18\,\%.$

Für $m = 360$ ergab sich in Aufgabe 10.32 $q_{\text{eff}} = 1.061821,\ p_{\text{eff}} = 6.18\,\%.$

Durch kontinuierliche Verzinsung ist also kein wesentlicher Effekt zu erzielen. Sie stellt ein Anwendungsbeispiel für die Exponentialfunktion e^x dar.