Aufgabe 9.50

Untersuchen Sie folgende Reihen mit Quotienten- bzw. Wurzelkriterium auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k}$, c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$!

Hinweis: $\mathrm{e} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^k$

Lösung:

Reihe $\sum_{k=l}^{\infty} a_k,\ a_k > 0$ Reihe

Quotientenkriterium $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \begin{cases} <1 & \text{konvergent} \\ =1 & \text{so nicht entscheidbar} \\ >1 & \text{divergent} \end{cases}$

Wurzelkriterium $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} \begin{cases} <1 & \text{konvergent} \\ =1 & \text{so nicht entscheidbar} \\ >1 & \text{divergent} \end{cases}$

a) $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!}\,\frac{(2k)!}{k!^2} = \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2}\,\frac{(2k)!}{(2k+2)!}$$
$$= \frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2(1+\frac{1}{k})^2}{k(2+\frac{1}{k})\,k(2+\frac{2}{k})} \to \frac{1}{4} < 1 \implies \text{Reihe konvergent}$$

b) $$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}\,\frac{k^k}{3^k k!} = \frac{3^{k+1}}{3^k}\,\frac{(k+1)!}{k!}\,\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$
$$= 3\,\frac{k^k}{(k+1)^k} = 3\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k = \frac{3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{3}{\mathrm{e}} > 1 \implies \text{Reihe divergent}$$

c) analog $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \frac{2}{\mathrm{e}} < 1 \implies$ Reihe konvergent

d) Wegen $k \geq 2$ ist $\ln k > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\ln k)^k} > 0$.

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{(\ln k)^k}} = \frac{1}{\ln k} \to 0 < 1 \implies \text{Reihe konvergent}$$