Aufgabe 9.49

Notieren Sie die folgenden Aussagen und ihre Negationen in formaler mathematischer Schreibweise mit Existenz- und Allquantor:

a) Die Elemente der Folge $S_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i}$ nähern sich beliebig dicht der Zahl 2, wenn man nur n groß genug wählt. (Konvergenz der geometrischen Reihe)

b) Es gibt keine reelle Zahl, der sich die Elemente der Folge $S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ beliebig dicht nähern. (Divergenz der harmonischen Reihe)

Lösung:

a) $\forall\, \varepsilon > 0 :\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - 2| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geq n_0$ (wahr)

Negation: $\exists\, \varepsilon > 0 :\ \nexists\, n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - 2| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geq n_0 \iff$

$\exists\, \varepsilon > 0 :\ \forall\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \ \exists\, n > n_0 : |S_n - 2| \geq \varepsilon$ (falsch)

b) $\nexists\, x \in \mathbb{R} :\ \forall\, \varepsilon > 0 :\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geq n_0 \iff$

$\forall x \in \mathbb{R} :\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ \ \nexists\, n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geq n_0 \iff$

$\forall x \in \mathbb{R} :\ \exists\, \varepsilon > 0 :\ \ \forall\, n_0 \in \mathbb{N} :\ \ \exists\, n \geq n_0 : |S_n - x| \geq \varepsilon$ (wahr)

Negation: $\exists\, x \in \mathbb{R} :\ \forall\, \varepsilon > 0 :\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |S_n - x| < \varepsilon\ \ \forall\, n \geq n_0$ (falsch)