

Aufgabe 9.48

Wo liegt der Fehler in der Gleichungskette

$$\begin{aligned} 2 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(1 - \frac{2^n - 1}{2^n}\right) + \dots \\ &= (1 + 1) + \left(-\frac{1}{2} + 1\right) + \left(-\frac{3}{4} + 1\right) + \dots + \left(-\frac{2^n - 1}{2^n} + 1\right) + \dots \\ &= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \\ &= 3 \quad ? \end{aligned}$$

Lösung:

Die Zerlegung ist bei Weglassung der Klammerung unzulässig, die Reihe $1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{4} \pm \dots$ kann nicht konvergieren, da ihre Glieder nicht gegen 0 konvergieren (notwendiges Konvergenzkriterium verletzt).