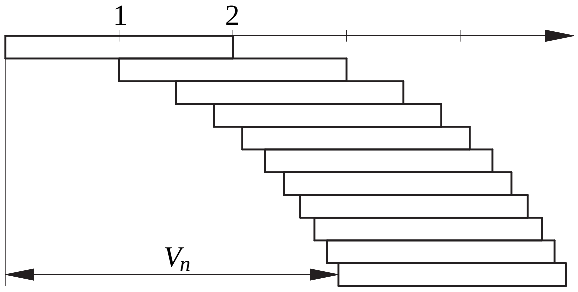
Aufgabe 9.47

n gleiche Holzbretter der Länge 2 werden so übereinander gelegt, dass in eine Richtung jedes Brett das darunterliegende so weit überragt, wie das ohne Kippen möglich ist. Bestimmen Sie die horizontale Verschiebung V_n zwischen dem obersten und dem untersten Brett! Was passiert für $n \to \infty$?



Hinweis:
Bestimmen Sie schrittweise die horizontale Komponente des Abstands zwischen maximalem Überhang und Schwerpunkt des Stapels, indem Sie den Schwerpunkt des auf einem Brett liegenden Stapels jeweils auf die Kante dieses Bretts legen!

(Meyberg, K. und Vachenauer, P.: Höhere Mathematik 1. Differential- und Integralrechnung. Vektor- und Matrizenrechnung. 6. Aufl. Springer 2003, S. 101)

Lösung:

Sei s_n die horizontale Komponente des Schwerpunkts des n-ten Bretts von oben und
S_n die horizontale Komponente des Schwerpunkts des Stapels der obersten n Bretter.
Die gesuchte Verschiebung ist dann $V_n = S_{n-1}$.

Offensichtlich gilt $s_1 = S_1 = 1$. Da das oberste Brett zur Hälfte auf dem nächsten aufliegt, gilt weiter $s_2 = S_1 + 1 = 2$, $S_2 = (s_1 + s_2)/2 = 3/2$.

Allgemein gilt $s_n = S_{n-1} + 1$ für $n \geq 2$. Daraus folgt

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} s_k + s_n\right) = \frac{1}{n}\Big((n-1)S_{n-1} + S_{n-1} + 1\Big) = \frac{1}{n}\left(nS_{n-1} + 1\right) = S_{n-1} + \frac{1}{n}.$$

Mit $S_1 = 1$ erhält man schließlich $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$.

Die gesuchte Verschiebung ist also $V_n = S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1}$.

Sowohl S_n als auch V_n sind Partialsummen der bestimmt gegen ∞ divergierenden harmonischen Reihe, so dass jede beliebige Verschiebung zu erreichen ist, wenn man n nur groß genug wählt.