Aufgabe 9.44

Welche der folgenden Reihen sind konvergent:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n$, c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1-\frac{1}{n}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\sin^2 n$, e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\ln(n+1)-\ln n)$, g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n}+3^{-2n})$, i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}3^{-2n}$?

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Summen!

Lösung:

a) geometrische Reihe mit $|q| = \frac{9}{10} < 1 \implies$ konvergent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{10^n} = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 9.$$

b) geometrische Reihe mit $|q| = 2 > 1 \implies$ divergent

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n} = 1 \neq 0 \implies$ Reihe divergent

d) $a_n = \frac{1}{2}\sin^2 n$ divergiert unbestimmt $\implies$ Reihe divergent

e) $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert (harmonische Reihe). Nach dem Majorantenkriterium divergiert auch die gegebene Reihe.

f) $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} (\ln(n+1)-\ln n) = \ln(N+1)-\ln 1 = \ln(N+1) \longrightarrow \infty$ für $N \to \infty$. Reihe divergent

g) $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1} \longrightarrow 1$ für $N \to \infty$. Reihe konvergiert gegen 1.

h) $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2^{-n}+3^{-2n}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$. Die beiden geometrischen Reihen konvergieren wegen $|\frac{1}{2}| < 1$ und $|\frac{1}{9}| < 1$. $S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{25}{8}$

i) geometrische Reihe mit $|q| = \frac{1}{18} < 1 \implies$ konvergent. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{18}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{18}} = \frac{18}{17}$