Aufgabe 9.39

Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) und die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergieren:

a) $a_n = \frac{50n^4+1000n^3+999}{2n^4+5n^2+9} + \frac{999n}{n^2+1}$, b) $a_n = \frac{5^n}{3^n}$, c) $a_n = \frac{5^n}{3^{2n}}$, d) $a_n = \frac{1}{(n+11)(n+12)}$,

e) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+12}-\sqrt{n})$, f) $a_n = (-1)^n$, g) $a_n = (-1)^{n(n+1)}$, h) $a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$!

Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

Lösung:

a) $$a_n = \frac{50n^4+1000n^3+999}{2n^4+5n^2+9} + \frac{999n}{n^2+1} = \frac{n^4\left(50+\frac{1000}{n}+\frac{999}{n^4}\right)}{n^4\left(2+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^4}\right)} + \frac{n\cdot 999}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$= \frac{50+\frac{1000}{n}+\frac{999}{n^4}}{2+\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^4}} + \frac{999}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{50+0+0}{2+0+0} + 0 = \underline{\underline{25}}$$

Da die Reihe nur konvergieren kann, wenn die Folge gegen 0 konvergiert, diese aber gegen 25 konvergiert, divergiert die Reihe.

b) $a_n = \frac{5^n}{3^n} = \left(\frac{5}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{\infty}}$, Da die Folge divergiert, divergiert die Reihe erst recht.

c) $a_n = \frac{5^n}{3^{2n}} = \frac{5^n}{(3^2)^n} = \left(\frac{5}{9}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{\underline{0}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{5}{9}} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(n+11)(n+12)} = \underline{\underline{0}}$, offensichtlich.

$$\frac{1}{n+11} - \frac{1}{n+12} = \frac{(n+12)-(n+11)}{(n+11)(n+12)} = \frac{1}{(n+11)(n+12)}$$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+11)(n+12)} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+11} - \frac{1}{n+12}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\pm\cdots+\frac{1}{N+10}-\frac{1}{N+11}+\frac{1}{N+11}-\frac{1}{N+12}\right) = \frac{1}{11}-\frac{1}{N+12}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+11)(n+12)} = \lim_{N\to\infty} S_N = \underline{\underline{\frac{1}{11}}}$$

e) $$\sqrt{n}\left(\sqrt{n+12}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\,\frac{\left(\sqrt{n+12}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+12}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+12}+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,\frac{n+12-n}{\sqrt{n+12}+\sqrt{n}} = \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n+12}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{12\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{12}{n}}+1\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{12}{1+1} = \underline{\underline{6}}$$

(Zur „Probe" kann man z.B. $a_{10000} = \sqrt{10000}\left(\sqrt{10012}-\sqrt{10000}\right) \approx 5.9982$ berechnen.)

Da die Reihe nur konvergieren kann, wenn die Folge gegen 0 konvergiert, diese aber gegen 6 konvergiert, divergiert die Reihe.

f) $a_n = (-1)^n = \begin{cases} (-1)^{2l} = 1, & n = 2l, \text{ d.h. gerade} \\ (-1)^{2l+1} = -1, & n = 2l+1, \text{ d.h. ungerade} \end{cases}$

Die Folgenglieder sind alternierend $+1$ und -1, so dass die Folge unbestimmt divergiert. Da die Folge divergiert, divergiert die Reihe erst recht.

g) Da das Produkt zweier aufeinander folgender ganzer Zahlen in jedem Falle gerade ist, gilt immer $a_n = (-1)^{n(n+1)} = 1$ und damit auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{1}}$. Da die Reihe nur konvergieren kann, wenn die Folge gegen 0 konvergiert, diese aber gegen 1 konvergiert, divergiert die Reihe.

h) Von zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist immer genau eine gerade. Ist diese auch durch 4 teilbar, so ist auch $\frac{n(n+1)}{2}$ gerade, ist sie nur durch 2, nicht aber durch 4 teilbar, so ist $\frac{n(n+1)}{2}$ ungerade. Der Exponent $\frac{n(n+1)}{2}$ ist also genau dann gerade, wenn n oder $n+1$ durch 4 teilbar ist, n also bei Division durch 4 den Rest 0 oder 3 lässt. Somit gilt

$$a_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \begin{cases} 1, & n = 4l \\ -1, & n = 4l+1 \\ -1, & n = 4l+2 \\ 1, & n = 4l+3 \end{cases} .$$

Die Folge divergiert also unbestimmt. Da die Folge divergiert, divergiert die Reihe erst recht.