Aufgabe 9.35

a) Geben Sie die Formeln für die Partialsummen von $\left(3^n\right)_{n=0}^{\infty}$ und $\left(\frac{1}{3^n}\right)_{n=0}^{\infty}$ an!

b) Bestimmen Sie mithilfe dieser Formeln $\sum\limits_{n=0}^{4} 3^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n}$!

c) Wogegen konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$?

d) Welches Guthaben erreicht ein zu 200 % p.a. verzinstes Konto, in das 5 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 10 Währungseinheiten eingezahlt werden, am Ende des 5. Jahres?

Lösung:

a) $\sum\limits_{n=0}^{N} 3^n = \frac{3^{N+1}-1}{3-1} = \frac{1}{2}\left(3^{N+1}-1\right), \qquad \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3^{N+1}}-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{N+1}}\right)$

b) $\sum\limits_{n=0}^{4} 3^n = \frac{1}{2}\left(3^5-1\right) = \frac{242}{2} = 121, \qquad \sum\limits_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{3^5}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{243-1}{243} = \frac{121}{81}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n = \infty$ (divergiert bestimmt), $\qquad \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$

d) 10 Währungseinheiten werden 5 Jahre, 10 weitere Währungseinheiten werden 4 Jahre lang verzinst usw., die letzten eingezahlten 10 Währungseinheiten werden 1 Jahr lang verzinst, mit dem Aufzinsungsfaktor $q=1+2=3$ beträgt das Guthaben also am Ende

$$10\cdot 3^5+10\cdot 3^4+\ldots+10\cdot 3 = 10\cdot 3\sum_{n=0}^{4} 3^n = \underbrace{10\cdot 3\,\frac{3^5-1}{3-1}}_{\substack{\text{Endwert einer}\\ \text{vorschüssigen Rente}}} = 30\cdot 121 = 3\,630 \text{ Währungseinheiten.}$$