

Aufgabe 9.30

Wie groß muss n mindestens gewählt werden, damit sich die Partialsumme $\sum_{k=0}^n 0.9^k$ von der Summe der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k$ um weniger als 10^{-6} unterscheidet?

Lösung:

$$\sum_{k=0}^n 0.9^k = \frac{1 - 0.9^{n+1}}{1 - 0.9} = 10(1 - 0.9^{n+1}), \quad \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k = \frac{1}{1 - 0.9} = 10,$$

$$\left| \sum_{k=0}^n 0.9^k - \sum_{k=0}^{\infty} 0.9^k \right| = |10(1 - 0.9^{n+1}) - 10| = 10 \cdot 0.9^{n+1} < 10^{-6} \iff 0.9^{n+1} < 10^{-7} \iff$$
$$(n+1) \lg 0.9 < \lg 10^{-7} = -7 \iff n+1 > \frac{-7}{\lg 0.9} = 152.98 \iff n > 151.98 \iff n \geq 152.$$

n muss mindestens gleich 152 gewählt werden.