Aufgabe 9.29

Berechnen Sie a) $\sum_{m=2}^{\infty} 2^{-2m}3^m$ und b) $\sum_{m=2}^{50} 2^{2m}3^{-m}$!

Lösung:

a) Durch Anwendung der Formel für die geometrische Reihe ergibt sich

$$\sum_{m=2}^{\infty} 2^{-2m}3^m = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^m - \left(\frac{3}{4}\right)^0 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 - \frac{3}{4} = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}.$$

b) Berechnung nach der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe

$$\sum_{m=0}^{k} q^m = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$$

Achtung: Summe muss dabei bei $m=0$ anfangen. Wir erhalten

$$\sum_{m=2}^{50} 2^{2m}3^{-m} = \sum_{m=2}^{50} \left(\frac{4}{3}\right)^m = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \sum_{m=0}^{48} \left(\frac{4}{3}\right)^m = \frac{16}{9} \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^4 9 - 1}{\frac{4}{3} - 1} \approx 7063118{,}52.$$