Aufgabe 9.27

a) Berechnen Sie die Partialsumme der geometrischen Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ und allgemein von $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k,\ q \in \mathbb{R}$!

b) Für welche $q \in \mathbb{R}$ konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$, geben Sie im Fall der Konvergenz die Summe an!

Lösung:

a) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}$

$2S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{2}{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-1}}$

$2S_n - S_n = 2-\frac{1}{2^n},\quad S_n = 2-\frac{1}{2^n}$

allgemein: $\quad S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k,\quad qS_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} q^k$

$qS_n - S_n = q+q^2+q^3+\cdots+q^n * q^{n+1}-1-q-q^2-q^3-\cdots-q^n = q^{n+1}-1,\quad S_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$

Partialsumme der geometrischen Reihe: $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0, & |q|<1 \\ 1, & q=1 \\ \infty, & q>1 \end{cases}$, für $q \leq -1$ ist q^{n+1} unbestimmt divergent (alternierendes Vz.)

$\Longrightarrow$ Summe der geometrischen Reihe: $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q},\ \text{falls } |q|<1}$

Für $q=1$ gilt $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = n+1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$,
auch für $q>1$ divergiert die geometrische Reihe bestimmt,
für $q \leq -1$ divergiert sie unbestimmt.

Für die speziell in a) betrachtete Reihe gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$