Aufgabe 9.25

Seien γ und a_0 positive Zahlen. Durch $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\gamma}{a_n}\right)$, $n=0,1,2,\ldots$ sei rekursiv eine Folge definiert.

a) Berechnen Sie für $\gamma=2$ und das Startglied $a_0=1$ einige Glieder der Folge und stellen Sie eine Vermutung für den Grenzwert auf!
b) Ermitteln Sie für beliebiges positives γ unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, den Grenzwert der Folge!
c) Was passiert für $a_0=\sqrt{\gamma}$?
d) Sei nun $a_0\neq\sqrt{\gamma}$. Zeigen Sie, dass dann für $n\geq 1$ in jedem Falle $a_n>\sqrt{\gamma}$ gilt!
e) Zeigen Sie, dass im Falle $a_0\neq\sqrt{\gamma}$ die Folge (a_n) für $n\geq 1$ streng monoton fällt!
f) Beweisen Sie die Konvergenz der Folge (und damit die Zulässigkeit der Voraussetzung von b)!

Lösung:

a)

n	a_n
0	1
1	1.5
2	1.416666667
3	1.414215686
4	1.414213562
5	1.414213562

$1.414213562=\sqrt{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{\gamma}{a_n}\right)=\frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n+\frac{\gamma}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}\right).$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, mit der Bezeichnung $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=g$ folgt dann $g=\frac{1}{2}\left(g+\frac{\gamma}{g}\right)$, $\frac{g}{2}=\frac{\gamma}{2g}$, $g^2=\gamma$, $g=\pm\sqrt{\gamma}$. Da alle Glieder der Folge auf Grund der Voraussetzungen positiv sind, kann nur $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{\gamma}$ sein.

Damit ist noch nicht die Konvergenz bewiesen, es ist nur gezeigt worden, dass, wenn die Folge konvergiert, der Grenzwert $\sqrt{\gamma}$ ist.

Um das zu verdeutlichen, betrachten wir die Rekursionsvorschift $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$. Offensichtlich nimmt die Folge immer abwechseln den Startwert und seinen Kehrwert an, das konvergiert nur für $a_0=1$ und $a_0=-1$. Führt man in $a_{n+1}=\frac{1}{a_n}$ den Grenzübergang $n\to\infty$ aus, so erhält man $g=\frac{1}{g}$, $g^2=1$, $g=\pm 1$. Das heißt, wenn Konvergenz vorliegt, dann erfolgt diese gegen ± 1. Im Allgemeinen ist aber die Folge unbestimmt divergent.

c) Für $a_0=\sqrt{\gamma}$ ergibt sich $a_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\gamma}+\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}}\right)=\frac{1}{2}2\sqrt{\gamma}=\sqrt{\gamma}$ und analog auch $a_2=\sqrt{\gamma}$ usw. Alle Folgenlieder und damit der Grenzwert sind damit $\sqrt{\gamma}$.

d) Zu zeigen ist, dass für $n \geq 0$ die Beziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right) > \sqrt{\gamma}$ gilt. Für $a_n > 0$ und $\gamma > 0$ ist dies äquivalent zu $a_n^2 + \gamma > 2a_n\sqrt{\gamma} \iff a_n^2 - 2a_n\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma}^2 = (a_n - \sqrt{\gamma})^2 > 0$ und damit zu $a_n \neq \sqrt{\gamma}$ äquivalent ist.

Laut Voraussetzung ist $a_0 > 0$ und $a_0 \neq \sqrt{\gamma}$, daraus folgt damit $a_1 > \sqrt{\gamma}$. Damit gilt aber auch $a_1 > 0$ und $a_1 \neq \sqrt{\gamma}$, woraus $a_2 > \sqrt{\gamma}$ folgt usw. Also folgt induktiv $a_n > \sqrt{\gamma}$ für alle n.

e) Zu zeigen ist, dass für $n \geq 1$ die Beziehung $\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\gamma}{a_n}\right) < a_n$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\frac{1}{2}\frac{\gamma}{a_n} < \frac{a_n}{2}$ und wegen $a_n > 0$ zu $\sqrt{\gamma} < a_n$. Letzteres ist nach d) erfüllt.

f) Nach d) und e) ist die Folge monoton fallend und nach unten beschränkt. Deshalb muss es einen Grenzwert geben. Da die Folge konvergiert, konvergiert sie gegen $\sqrt{\gamma}$, wie für diesen Fall bereits aus b) bekannt ist.