Aufgabe 9.24

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{2+\sqrt[3]{5}}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\dfrac{12n^3}{12n^2+6n+1}\right)$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})$!

Lösung:

a) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{4n^2+5n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}=\frac{1}{4}$$

b) $\sin n$ divergiert unbestimmt, also auch $\dfrac{\sin n}{2+\sqrt[3]{5}}$

(Wenn man die Divergenz von $\sin n$ exakt begründen will, kann man z.B. wie folgt argumentieren:

Für $2k\pi+\frac{\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{4}$ gilt $\sin x\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$. Da das Intervall die Länge $\frac{\pi}{2}>1$ hat, liegt in ihm wenigstens eine ganze Zahl. In jeder Periode des Sinus liegt also wenigstens eine ganze Zahl n, für die $\sin n\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt. Damit nimmt die Folge $\sin n$ für $n\to\infty$ immer wieder Werte an, die $\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind.

Da für $2k\pi+\frac{5\pi}{4}\le x\le 2k\pi+\frac{7\pi}{4}$ $\sin x\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt, nimmt die Folge $\sin n$ analog für $n\to\infty$ immer wieder auch Werte an, die $\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sind.

Da die Folge $\sin n$ immer wieder sowohl Werte $\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$ als auch Werte $\le-\frac{1}{\sqrt{2}}$ annimmt, divergiert sie unbestimmt.)

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{12n^3}{12n^2+6n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^3+6n^2+n-12n^3}{12n^2+6n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(6+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(12+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{12+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n})(n+5-n)}{\sqrt{n+5}+\sqrt{n}}$$
$$=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}=\frac{5}{2}$$