Aufgabe 9.21

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^2(2n+1)\dfrac{\pi}{4}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{4n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^3+7n^2}{(n+2)(n+1)} - 2n+1\right)$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+8}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6}\right)$!

Lösung:

a) Die Folgenglieder seien mit a_n bezeichnet.

$a_0 = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1,\ \ a_1 = \tan\dfrac{3\pi}{4} = -1,\ \ a_2 = \tan\dfrac{5\pi}{4} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1,\ \ a_3 = \tan\dfrac{7\pi}{4} = \tan\dfrac{3\pi}{4} = -1,$

$a_4 = \tan\dfrac{9\pi}{4} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1,\ \ a_5 = \tan\dfrac{11\pi}{4} = \tan\dfrac{3\pi}{4} = -1$ usw.

Die Folge nimmt wegen der Periodizität des Tangens alternierend die Werte 1 und -1 an, divergiert also unbestimmt.

b) $\tan^2(2n+1)\dfrac{\pi}{4} = (\pm 1)^2 = 1$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \tan^2(2n+1)\dfrac{\pi}{4} = 1$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^2$$

Bekanntlich gilt $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m = \mathrm{e}$. Die Folge $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}$ besteht aus den geraden Gliedern der Folge $\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$, hat also den gleichen Grenzwert. Somit gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{4n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^2 = \mathrm{e}^2.$$

d) $$\begin{aligned}\frac{2n^3+7n^2}{(n+2)(n+1)} - 2n+1 &= \frac{2n^3+7n^2+(-2n+1)(n^2+3n+2)}{n^2+3n+2} \\ &= \frac{2n^3+7n^2-2n^3-6n^2-4n+n^2+3n+2}{n^2+3n+2} = \frac{2n^2-n+2}{n^2+3n+2} \\ &= \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}\sqrt{n+8}\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6}\right) &= \sqrt{n+8}\,\frac{\left(\sqrt{n+7}-\sqrt{n+6}\right)\left(\sqrt{n+7}+\sqrt{n+6}\right)}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+6}} \\ &= \sqrt{n+8}\,\frac{(n+7)-(n+6)}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+6}} = \frac{\sqrt{n+8}}{\sqrt{n+7}+\sqrt{n+6}}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\sqrt{1+\frac{8}{n}}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1+\frac{6}{n}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$