Aufgabe 9.19

Berechnen Sie mit Hilfe des bekannten Grenzwertes $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n^2)}$, d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+10}$!

Lösung:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist ein Grenzwert der Form 1^∞. Das ist im Allgemeinen ein unbestimmter Ausdruck, konkret ist der Grenzwert e.

a) Berücksichtigt man nur gerade Glieder der Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, also $n=2m$ („Teilfolge“), so ergibt sich der gleiche Grenzwert, also $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{2m}\right)^{2m} = \mathrm{e}$, das ist nichts anderes als $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = \mathrm{e}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{2n}{2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 = \mathrm{e}^2$$

c) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^n = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^n = \infty$$

(Diesmal ist $1^\infty = \infty$!!!)

d) Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$ gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$ (Es werden immer nur die nächsten Folgenglieder genommen.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+10} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1+9} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^9$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^9 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} 1^9 = \mathrm{e}$$