Aufgabe 9.18

Berechnen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{9n+2}}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n\pi$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n(n+1)\pi$!

Lösung:

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{9n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}+\sqrt{9n+2})}{(\sqrt{n}-\sqrt{9n+2})(\sqrt{n}+\sqrt{9n+2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n}\sqrt{9n+2}}{n-9n-2}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{9n^2+2n}}{-8n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+\sqrt{n^2(9+\frac{2}{n})}}{-8n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\sqrt{(9+\frac{2}{n})}}{n(-8-\frac{2}{n})} = \frac{1+\sqrt{9}}{-8} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

b) $\cos n\pi$ ist gleich $+1$ für gerade n und gleich -1 für ungerade n, so dass die Folge unbestimmt divergiert. Der Grenzwert existiert nicht, auch nicht im Sinne von Unendlich.

c) Da immer eine der Zahlen n und $n+1$ gerade ist, ist ihr Produkt $n(n+1)$ auch immer gerade und damit $\cos n(n+1)\pi = 1$ für alle n, so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n(n+1)\pi = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = \underline{\underline{1}}$ gilt.