Aufgabe 9.6

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass $x_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3}$ gegen 0 konvergiert!

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+\sqrt{n}+1}{n^3}$!

Lösung:

a) Sei $|x_n - 0| = |x_n| = x_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3} < \varepsilon$.

Wir wollen nur die Tatsache der Konvergenz beweisen und suchen deshalb nicht unbedingt das kleinste $n_0(\varepsilon)$, für das für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Beziehung $|x_n| < \varepsilon$ erfüllt ist.

Wenn wir $\dfrac{2\sqrt{n}}{n^3} < \varepsilon$ sichern, ist für $n \geq 1$ wegen $1 \geq \sqrt{n}$ die Beziehung $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3} < \varepsilon$ auch erfüllt und n_0 lässt sich leichter berechnen.

$$\frac{2\sqrt{n}}{b^3} = \frac{2}{n^{5/2}} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{\varepsilon} < n^{5/2} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{5}} < n$$

Wählen wir also als $n_0(\varepsilon)$ die zu $\left(\dfrac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{2}{5}}$ nächstgrößere ganze Zahl, so gilt für $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$|x_n - 0| = |x_n| = x_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^3} < \frac{2\sqrt{n}}{n^3} = \frac{2}{n^{5/2}} < \varepsilon.$$

b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, deshalb folgt mit dem Ergebnis von a)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+\sqrt{n}+1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{\sqrt{n}+1}{n^3}\right) = 2 + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3} = 2+0 = 2.$$

Man kann natürlich auch direkt mit der Definition argumentieren. Da es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Beziehung $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^3} < \varepsilon$ erfüllt ist, und die linke Seite letzterer Ungleichung gleich $\left|\dfrac{2n^3+\sqrt{n}+1}{n^3} - 2\right|$ ist, gilt $\dfrac{2n^3+\sqrt{n}+1}{n^3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$.