Aufgabe 9.5

Die Folge $a_k = \frac{1}{2^k}$, $k \in \mathbb{N}$ konvergiert für $k \to \infty$ gegen 0, weil für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_0(\varepsilon)$ gilt. Bestimmen Sie ein solches $N_0(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\varepsilon = 0{,}001$ und allgemein für beliebiges $\varepsilon > 0$!

Lösung:

$|a_k| < \varepsilon$ bedeutet $\frac{1}{2^k} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < 2^k \iff \ln\frac{1}{\varepsilon} < k \ln 2 \iff k > -\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$.

Wählt man als $N_0(\varepsilon)$ die zu $-\frac{\ln\varepsilon}{\ln 2}$ nächstgrößere ganze Zahl, so ergibt sich

$N_0(0{,}1) = 4$, $N_0(0{,}01) = 7$ und $N_0(0{,}001) = 10$.