

Aufgabe 9.4

Die Schaumhöhe in einem Bierglas betrage n Sekunden nach dem Eingießen $h_n = 4 \cdot 0.992^n$ [cm]. (vgl. [Leike, A.: Demonstration of the exponential decay law using beer froth](#), Eur J. Phys. 23(2002), 21-26)

- Beweisen Sie mithilfe der Definition, dass h_n eine Nullfolge ist!
- Ermitteln Sie, nach wieviel Sekunden die Schaumhöhe unter 2, 1, 0.5 bzw. 0.1 cm gefallen ist!

Lösung:

- a) Sei $\varepsilon > 0$, beliebig.

$$\begin{aligned} |h_n| = h_n = 4 \cdot 0.992^n < \varepsilon &\iff 0.992^n < \frac{\varepsilon}{4} \iff \ln 0.992^n < \ln \frac{\varepsilon}{4} \iff n \ln 0.992 < \ln \frac{\varepsilon}{4} \\ \iff n > \frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0.992} \end{aligned}$$

Wählt man also als $n_0(\varepsilon)$ die zu $\frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0.992}$ nächstgrößere ganze Zahl, so gilt für alle $n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(\varepsilon/4)}{\ln 0.992}$, dass $|h_n| < \varepsilon$ ist. Damit ist die Folge h_n nach Definition eine Nullfolge.

- b) $\varepsilon = 2$: $\ln(\varepsilon/4)/\ln 0.992 \approx 86.30$, $n_0(2) = 87$, nach 87 s,
 $\varepsilon = 1$: $\ln(\varepsilon/4)/\ln 0.992 \approx 172.59$, $n_0(1) = 173$, nach 173 s,
 $\varepsilon = 0.5$: $\ln(\varepsilon/4)/\ln 0.992 \approx 258.89$, $n_0(0.5) = 259$, nach 259 s,
 $\varepsilon = 0.1$: $\ln(\varepsilon/4)/\ln 0.992 \approx 459.26$, $n_0(0.1) = 460$, nach 460 s.

(Das entspricht etwa den Werten für Augustinerbräu in dem Artikel [Leike, A.: Demonstration of the exponential decay law using beer froth](#), Eur J. Phys. 23(2002), 21-26.)