

Aufgabe 9.3

An einer bestimmten Stelle betrage die Flächenbelastung durch ein radioaktives Isotop n Jahre nach der Reaktorkatastrophe von Tschernobyl $A_n = 100e^{-0.023n}$ [kBq/m²].

- Beweisen Sie mithilfe der Definition, dass A_n eine Nullfolge ist!
- Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren die Flächenbelastung unter 50, 5, 0.5 bzw. 0.05 kBq/m² gefallen ist!

Lösung:

- a) Sei $\varepsilon > 0$, beliebig.

$$\begin{aligned} |A_n| = A_n = 100e^{-0.023n} < \varepsilon &\iff e^{-0.023n} < \frac{\varepsilon}{100} \iff -0.023n < \ln \frac{\varepsilon}{100} \\ \iff n > -\frac{\ln \varepsilon - \ln 100}{0.023} = \frac{\ln 100 - \ln \varepsilon}{0.023} \end{aligned}$$

Wählt man also als $n_0(\varepsilon)$ die zu $(\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023$ nächstgrößere ganze Zahl, so gilt für alle $n \geq n_0(\varepsilon) = (\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023$, dass $|A_n| < \varepsilon$ ist. Damit ist die Folge A_n nach Definition eine Nullfolge.

- b) $\varepsilon = 50$: $(\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023 \approx 30.14$, $n_0(50) = 31$, nach 31 Jahren,
 $\varepsilon = 5$: $(\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023 \approx 130.25$, $n_0(5) = 131$, nach 131 Jahren,
 $\varepsilon = 0.5$: $(\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023 \approx 230.36$, $n_0(0.5) = 231$, nach 231 Jahren,
 $\varepsilon = 0.05$: $(\ln 100 - \ln \varepsilon)/0.023 \approx 330.47$, $n_0(0.05) = 331$, nach 331 Jahren.

(Das entspricht ungefähr den Werten für Cäsium-137, das eine Halbwertszeit von ca. 30 Jahren hat.)