Aufgabe 9.2

Ein Vermögen V_0 unterliegt einer jährlichen Verzinsung von 4 %, Abschreibung von 5 % und Besteuerung von 1 % jeweils auf das bzw. aus dem aktuellen Vermögen.

a) Geben Sie die Folge V_n der Vermögenswerte nach n Jahren an!
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Definition, dass (V_n) gegen 0 konvergiert!
c) Ermitteln Sie, nach wieviel Jahren ein Vermögen von $V_0 = 200\,000$ € unter
(i) 100 000 €, (ii) 10 000 €, (iii) 1000 €, (iv) 100 €
gefallen ist!

Lösung:

Jährliche Wertänderung um $+4\% - 5\% - 1\% = -2\%$

a) $V_1 = V_0 \cdot 0.98$
$V_2 = V_1 \cdot 0.98 = V_0 \cdot 0.98^2$
usw.
$V_n = V_0 \cdot 0.98^n$

b) Konvergenz gegen 0:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $|V_n - 0| = V_n < \varepsilon$.
Das heißt: Zu jedem nichtnegativem Geldbetrag (und liege er noch so dicht bei 0) gibt es eine Jahreszahl, nach der er von dem Vermögen unterschritten wird.

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 \cdot 0.98^n < \varepsilon \\ \Longleftrightarrow \quad 0.98^n &< \frac{\varepsilon}{V_0} \\ \Longleftrightarrow \quad n \ln 0.98 &< \ln \frac{\varepsilon}{V_0} \\ \Longleftrightarrow \quad n &> \frac{\ln \frac{\varepsilon}{V_0}}{\ln 0.98} \qquad (\text{da } \ln 0.98 < 0) \end{aligned}$$

Wählen n_0 als nächstgrößte ganze Zahl nach $\dfrac{\ln \frac{\varepsilon}{V_0}}{\ln 0.98}$, dann gilt für $n \geq n_0(\varepsilon) > \ln \frac{\varepsilon}{V_0}$, dass $V_n < \varepsilon$ ist.

c) Hier werden nun n_0 zu konkreten ε gesucht und damit der Sinn der Sache hoffentlich verständlich:

(i) $n > \dfrac{\ln \frac{100000}{200000}}{\ln 0.98} = \dfrac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 0.98} = 34.31$ nach 35 Jahren,

(ii) $n > \dfrac{\ln \frac{1}{20}}{\ln 0.98} = 148.28$ nach 149 Jahren,

(iii) $n > \dfrac{\ln \frac{1}{200}}{\ln 0.98} = 262.26$ nach 263 Jahren,

(iv) $n > \dfrac{\ln \frac{1}{2000}}{\ln 0.98} = 376.23$ nach 377 Jahren.