Aufgabe 8.65

In einem Konfektionsbetrieb ist eine Jacke in 3 Größen je mindestens 1800 mal zu fertigen. Für den Zuschnitt der hierfür verwendeten Stoffballen stehen 6 Varianten zur Verfügung:

Variante	1	2	3	4	5	6
Größe S	12	0	0	6	6	0
Größe M	0	9	0	0	3	6
Größe L	0	0	8	4	2	4

Ermitteln Sie mit der Simplexmethode, wie viele Ballen mindestens benötigt werden!

Lösung:

Version Gaußalgorithmus

(Literatur: Luderer, B. und Würker, U.: Einstieg in die Wirtschaftsmathematik. Vieweg+Teubner)

x_i: Anzahl Anwendung Schnittvariante i

$$
\begin{array}{lrrrrrrcll}
\text{Größe S:} & 12x_1 & & & +6x_4 & +6x_5 & & \geq & 1800 & \\
\text{Größe M:} & & 9x_2 & & & +3x_5 & +6x_6 & \geq & 1800 & \\
\text{Größe L:} & & & 8x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +4x_6 & \geq & 1800 & \\
\text{Ziel:} & x_1+ & x_2+ & x_3+ & x_4+ & x_5+ & x_6 & \longrightarrow & \min & \text{(minimale Zahl Stoffballen)} \\
\text{Nichtnegativität:} & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq & 0, & \text{außerdem Ganzzahligkeit}
\end{array}
$$

Normalform:

$$
\boxed{
\begin{array}{rrrrrrrrrcl}
z'=-z=-x_1- & x_2- & x_3- & x_4- & x_5- & x_6 & & & & \longrightarrow & \max \\
12x_1 & & & +6x_4 & +6x_5 & & -u_1 & & & = & 1800 \\
& 9x_2 & & & +3x_5 & +6x_6 & & -u_2 & & = & 1800 \\
& & 8x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +4x_6 & & & -u_3 & = & 1800 \\
x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & u_1, & u_2, & u_3 & \geq & 0
\end{array}
}
$$

Als Basis kann x_1, x_2, x_3 verwendet werden, nach Division der ersten Zeile durch 12, der zweiten durch 9 und der dritten durch 8 erhält man

BV	c_B	x_1 -1	x_2 -1	x_3 -1	x_4 -1	x_5 -1	x_6 -1	u_1 0	u_2 0	u_3 0	x_B	θ
x_1	-1	**1**	**0**	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	150	—
x_2	-1	**0**	**1**	**0**	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{9}$	0	200	$\boxed{300}$
x_3	-1	**0**	**0**	**1**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{8}$	225	450
		0	**0**	**0**	0	$-\frac{1}{12}$	$\boxed{-\frac{1}{6}}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$	-575	
x_1	-1	**1**	0	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{12}$	0	0	150	
x_6	-1	**0**	$\frac{3}{2}$	**0**	0	$\frac{1}{2}$	**1**	0	$-\frac{1}{6}$	0	300	
x_3	-1	**0**	$-\frac{3}{4}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	**0**	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	75	
		0	$\frac{1}{4}$	**0**	0	0	**0**	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	

Sieht man nicht, dass mit x_1, x_2, x_3 als Basis eine erste zulässige Basislösung ohne weiteres ablesbar ist, so ist zunächst eine Hilfsaufgabe zu lösen:

$$
\boxed{
\begin{array}{lrrrrrrrrrrrcl}
h= & & & & & & & & & -v_1 & -v_2 & -v_3 & \longrightarrow & \max \\
& 12x_1 & & & +6x_4 & +6x_5 & & -u_1 & & & +\mathbf{v_1} & & & = 1800 \\
& & 9x_2 & & & +3x_5 & +6x_6 & & -u_2 & & & +\mathbf{v_2} & & = 1800 \\
& & & 8x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +4x_6 & & & -u_3 & & & +\mathbf{v_3} & = 1800 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & u_1, & u_2, & u_3, & v_1, & v_2, & v_3 & \geq 0
\end{array}
}
$$

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2	v_3		
BV	c_B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−1	−1	−1	x_B	θ
v_1	−1	12	0	0	6	6	0	−1	0	0	**1**	**0**	**0**	1800	$\boxed{150}$
v_2	−1	0	9	0	0	3	6	0	−1	0	**0**	**1**	**0**	1800	—
v_3	−1	0	0	8	4	2	4	0	0	−1	**0**	**0**	**1**	1800	—
		$\boxed{-12}$	−9	−8	−10	−11	−10	1	1	1	**0**	**0**	**0**	−5400	
x_1	0	**1**	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$	**0**	**0**	150	—
v_2	−1	**0**	9	0	0	3	6	0	−1	0	0	**1**	**0**	1800	$\boxed{300}$
v_3	−1	**0**	0	8	4	2	4	0	0	−1	0	**0**	**1**	1800	450
		0	−9	−8	−4	−5	$\boxed{-10}$	0	1	1	1	**0**	**0**	−3600	
x_1	0	**1**	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	**0**	150	—
x_6	0	**0**	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	**1**	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	**0**	300	—
v_3	−1	**0**	−6	8	4	0	**0**	0	$\frac{2}{3}$	−1	0	$-\frac{2}{3}$	**1**	600	$\boxed{75}$
		0	6	$\boxed{-8}$	−4	0	**0**	0	$-\frac{2}{3}$	1	1	$\frac{5}{3}$	**0**	−600	
x_1	0	**1**	0	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{12}$	0	0	$\frac{1}{12}$	0	0	150	
x_6	0	**0**	$\frac{3}{2}$	**0**	0	$\frac{1}{2}$	**1**	0	$-\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{6}$	0	300	
x_3	0	**0**	$-\frac{3}{4}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	**0**	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	0	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	75	
		0	0	**0**	0	0	**0**	0	0	0	1	1	1	0	

Damit ist das Optimum der Hilfsaufgabe 0 und es liegt eine zulässige Basislösung der Ausgangsaufgabe vor: $x_1=150,\ x_3=75,\ x_6=300,\ x_2=x_4=x_5=u_1=u_2=u_3=0$.

(Die Spalten für v_1, v_2 bzw. v_3 hätten schon nach dem 1., 2. bzw. 3. Simplexschritt für die Hilfsaufgabe gestrichen werden können.)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	−1	−1	−1	−1	−1	−1	0	0	0	x_B	θ
x_1	−1	**1**	0	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	$-\frac{1}{12}$	0	0	150	
x_6	−1	**0**	$\frac{3}{2}$	**0**	0	$\frac{1}{2}$	**1**	0	$-\frac{1}{6}$	0	300	
x_3	−1	**0**	$-\frac{3}{4}$	**1**	$\frac{1}{2}$	0	**0**	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	75	
		0	$\frac{1}{4}$	**0**	0	0	**0**	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	−525	

Alle Optimalitätsindikatoren sind ≥ 0, damit liegt ein Optimum vor. Somit werden mindestens $z^* = -z'^* = 525$ Stoffballen benötigt.

Da auch Optimalitätsindikatoren für Nichtbasisvariablen gleich 0 sind und man offensichtlich die Variablen x_4 und x_5 in die Basis aufnehmen kann, ist die Lösung der Optimierungsaufgabe allerdings nicht eindeutig, es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Jacken mit der minimalen Stoffballenzahl herzustellen. Die Weiterrechnung mit dem Simplextableau liefert:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	x_B	θ
x_1	-1	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{12}$	0	0	150	300
x_6	-1	$\mathbf{0}$	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	300	—
x_3	-1	$\mathbf{0}$	$-\frac{3}{4}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	0	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	75	$\boxed{150}$
		$\mathbf{0}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{0}$	$\boxed{0}$	0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	
x_1	-1	$\mathbf{1}$	$\frac{3}{4}$	-1	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	75	$\boxed{150}$
x_6	-1	$\mathbf{0}$	$\frac{3}{2}$	0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	300	600
x_4	-1	$\mathbf{0}$	$-\frac{3}{2}$	2	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	150	—
		$\mathbf{0}$	$\frac{1}{4}$	0	$\mathbf{0}$	$\boxed{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	
x_5	-1	2	$\frac{3}{2}$	-2	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	150	
x_6	-1	-1	$\frac{3}{4}$	1	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	225	
x_4	-1	0	$-\frac{3}{2}$	2	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{4}$	150	
		0	$\frac{1}{4}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	

usw.

oder

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	u_1	u_2	u_3		
BV	c_B	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	0	0	x_B	θ
x_1	-1	$\mathbf{1}$	0	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{12}$	0	0	150	$\boxed{300}$
x_6	-1	$\mathbf{0}$	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{1}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	300	600
x_3	-1	$\mathbf{0}$	$-\frac{3}{4}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	0	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	75	—
		$\mathbf{0}$	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{0}$	0	$\boxed{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	
x_5	-1	2	0	$\mathbf{0}$	1	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	300	
x_6	-1	-1	$\frac{3}{2}$	$\mathbf{0}$	$-\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$	0	150	
x_3	-1	0	$-\frac{3}{4}$	$\mathbf{1}$	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	0	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{8}$	75	
		0	$\frac{1}{4}$	$\mathbf{0}$	0	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	-525	

usw.

Optimale Basislösungen sind somit z.B. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 75 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 150 \\ 150 \\ 225 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \\ 300 \\ 150 \end{pmatrix}$.

In jedem Falle sind alle Schlupfvariablen als Nichtbasisvariable gleich 0, so dass jeweils exakt 1800 Jacken jeder Größe gefertigt werden. Löst man das Gleichungssystem für den Zuschnitt von exakt 1800 Jacken ohne Minimierungsbedingung, so erhält man

$$\begin{array}{cccccc|c} 12 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 1800 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1800 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 2 & 4 & 1800 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 200 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 225 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 225 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Von der Lösung mit der Simplexmethode ist bekannt, dass in der optimalen Lösung $x_2 = 200 - \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t = 0$ gilt. Daraus folgt $t = 300 - \frac{s}{2}$ und damit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 225 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 300 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - s \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 0 \\ 75 \\ 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Für alle diese Lösungen ist offensichtlich $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 525$, so dass damit die allgemeine optimale Lösung beschrieben ist, wenn u und v ganzzahlig und so gewählt werden, dass alle Komponenten der Lösung nichtnegativ werden. Letzteres ist erfüllt, wenn $0 \le u \le 75$ und $0 \le v \le 150 - u$ gilt.

Z.B. ergeben sich die zweite und die vierte der oben angegebenen optimalen Basislösungen, wenn $u = 75$, $v = 0$ bzw. $u = 0$, $v = 150$ gewählt wird.